1 Examples of proof by induction

1.1 The simplest case

Consider the following definition:

$$\left[\; f(\mathsf{n}) \doteq \mathsf{n} = 0 \begin{cases} 1 \\ 3 - f(\mathsf{n}-1) \end{cases} \;\right]$$

The function has one variable $[\,\mathsf{n}\,]^{\cdot}$ and that variable is suited to induction in its simplest form because $[\,\mathsf{n}\,]^{\cdot}$ is compared to zero and, if non-zero, $[\,f\,]^{\circ}$ is applied recursively to $[\,\mathsf{n}-1\,]^{\cdot}$.

[**Mac lemma A** : $\mathsf{n} \in \mathbf{N} \rightarrow f(\mathsf{n}) \in \mathbf{Z}$]

[**Mac proof of** A**:**

L01 :	Definition $\triangleright$	$f(\mathsf{n}) \equiv \mathrm{if}(\mathsf{n}=0, 1, 3-f(\mathsf{n}-1))$	;
L02 :	Block $\triangleright$	Begin	;
L03 :	Hypothesis $\triangleright$	$\quad \mathsf{n} \in \mathbf{N}$	;
L04 :	Hypothesis $\triangleright$	$\quad (\mathsf{n}=0) \in \mathbf{T}$	;
L05 :	IfT $\triangleright$ L4 $\triangleright$	$\quad \mathrm{if}(\mathsf{n}=0, 1, 3-f(\mathsf{n}-1)) \equiv 1$	;
L06 :	Transitivity $\triangleright$ L1 $\triangleright$ L5 $\triangleright$	$\quad f(\mathsf{n}) \equiv 1$	;
L07 :	TypeNumeralInZ $\triangleright$	$\quad 1 \in \mathbf{Z}$	;
L08 :	Reverse' $\triangleright$ L6 $\triangleright$ L7 $\triangleright$	$\quad f(\mathsf{n}) \in \mathbf{Z}$	;
L09 :	Block $\triangleright$	End	;
L10 :	Block $\triangleright$	Begin	;
L11 :	Hypothesis $\triangleright$	$\quad \mathsf{n} \in \mathbf{N}$	;
L12 :	Hypothesis $\triangleright$	$\quad (\mathsf{n}=0) \in \mathbf{F}$	;
L13 :	Hypothesis $\triangleright$	$\quad f(\mathsf{n}-1) \in \mathbf{Z}$	;
L14 :	IfF $\triangleright$ L12 $\triangleright$	$\quad \mathrm{if}(\mathsf{n}=0, 1, 3-f(\mathsf{n}-1)) \equiv 3-f(\mathsf{n}-1)$	;
L15 :	Transitivity $\triangleright$ L1 $\triangleright$ L14 $\triangleright$	$\quad f(\mathsf{n}) \equiv 3-f(\mathsf{n}-1)$	;
L16 :	TypeNumeralInZ $\triangleright$	$\quad 3 \in \mathbf{Z}$	;
L17 :	TypeZ-Z $\triangleright$ L16 $\triangleright$ L13 $\triangleright$	$\quad 3-f(\mathsf{n}-1) \in \mathbf{Z}$	;
L18 :	Reverse' $\triangleright$ L15 $\triangleright$ L17 $\triangleright$	$\quad f(\mathsf{n}) \in \mathbf{Z}$	;
L19 :	Block $\triangleright$	End	;
L20 :	Induction $\triangleright$ L08 $\triangleright$ L18 $\triangleright$	$\mathsf{n} \in \mathbf{Z} \rightarrow f(\mathsf{n}) \in \mathbf{Z}$	]

In the proof above, note the following:

- It is very often convenient to list definitions at the beginning of the proof. In the present proof, there is one definition of interest, and that definition is stated in Line 1.
- Line 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, and 19 plus the conclusion of Line 8 and 18 can be written down almost automatically once it is decided to prove Line 20 by induction.

$[\,\mathrm{A}\,]^{\cdot}$ rule A

- Line 5 and 6 form an "IfT Transitivity" ideom which simplifies the definition in the given context. Similarly, Line 14 and 15 form an IfF Transitivity ideom.

1.2 The fixed y case

Consider the following definition:

$$\left[\; f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \doteq \mathsf{x} = 0 \begin{cases} \mathsf{y} \\ f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y})+1 \end{cases} \right]$$

The function has two variables, $[\,\mathsf{x}\,]^{\cdot}$ and $[\,\mathsf{y}\,]^{\cdot}$. $[\,\mathsf{x}\,]^{\cdot}$ is suited to induction because $[\,\mathsf{x}\,]^{\cdot}$ is compared to zero and, if non-zero, $[\,f\,]^{\circ}$ is applied recursively to $[\,\mathsf{x}-1\,]^{\cdot}$. $[\,\mathsf{y}\,]^{\cdot}$ is suited for fixation in an outer block because $[\,f\,]^{\circ}$ is applied recursively to an unmodified $[\,\mathsf{y}\,]^{\cdot}$.

[**Mac lemma B** : $\mathsf{y} \in \mathbf{N} \to \mathsf{x} \in \mathbf{N} \to f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$]

[**Mac proof of** B**:**

L01 :	Definition $\rhd$	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \equiv \mathrm{if}(\mathsf{x}=0,\mathsf{y},f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y})+1)$	;
L02 :	Block $\rhd$	Begin	;
L03 :	Hypothesis $\rhd$	$\mathsf{y} \in \mathbf{N}$	;
L04 :	Block $\rhd$	Begin	;
L05 :	Hypothesis $\rhd$	$\mathsf{x} \in \mathbf{N}$	;
L06 :	Hypothesis $\rhd$	$(\mathsf{x}=0) \in \mathbf{T}$	;
L07 :	IfT $\rhd$ L6 $\rhd$	$\mathrm{if}(\mathsf{x}=0,\mathsf{y},f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y})+1) \equiv \mathsf{y}$	;
L08 :	Transitivity $\rhd$ L1 $\rhd$ L7 $\rhd$	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \equiv \mathsf{y}$	;
L09 :	Reverse' $\rhd$ L8 $\rhd$ L3 $\rhd$	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L10 :	Block $\rhd$	End	;
L11 :	Block $\rhd$	Begin	;
L12 :	Hypothesis $\rhd$	$\mathsf{x} \in \mathbf{N}$	;
L13 :	Hypothesis $\rhd$	$(\mathsf{x}=0) \in \mathbf{F}$	;
L14 :	Hypothesis $\rhd$	$f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L15 :	IfF $\rhd$ L13 $\rhd$	$\mathrm{if}(\mathsf{x}=0,\mathsf{y},f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y})+1) \equiv f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y})+1$	;
L16 :	Transitivity $\rhd$ L1 $\rhd$ L15 $\rhd$	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \equiv f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y})+1$	;
L17 :	TypeNumeralInZ $\rhd$	$1 \in \mathbf{N}$	;
L18 :	TypeN+N $\rhd$ L14 $\rhd$ L17 $\rhd$	$f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y})+1 \in \mathbf{N}$	;
L19 :	Reverse' $\rhd$ L16 $\rhd$ L18 $\rhd$	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L20 :	Block $\rhd$	End	;
L21 :	Induction $\rhd$ L09 $\rhd$ L19 $\rhd$	$\mathsf{x} \in \mathbf{N} \to f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L22 :	Block $\rhd$	End	]

$[\,\mathrm{B}\,]^{\cdot}$ rule B

1.3 The variable y case

Consider the following definition:

$$\left[\; f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \doteq \mathsf{x}=0 \begin{cases} \mathsf{y} \\ f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}+1) \end{cases} \;\right]$$

The function has two variables, $[\,\mathsf{x}\,]^{\cdot}$ and $[\,\mathsf{y}\,]^{\cdot}$. $[\,\mathsf{x}\,]^{\cdot}$ is suited to induction because $[\,\mathsf{x}\,]^{\cdot}$ is compared to zero and, if non-zero, $[\,f\,]^{\circ}$ is recursively applied to $[\,\mathsf{x}-1\,]^{\cdot}$. $[\,\mathsf{y}\,]^{\cdot}$ is unsuited for fixation in an outer block $[\,\mathsf{y}\,]^{\cdot}$ changes during the computation of $[\,f(\mathsf{x},\mathsf{y})\,]^{\cdot}$.

[**Mac lemma C** : $\mathsf{x} \in \mathbf{N} \rightarrow \forall \mathsf{y} {\in} \mathbf{N}\colon f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$]

[**Mac proof of** C**:**

L01 :	Definition ▷	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \equiv \mathrm{if}(\mathsf{x}=0,\mathsf{y},f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}+1))$	;
L02 :	SetN ▷	$\mathbf{N} \in \mathbf{Set}$	;
L03 :	Block ▷	Begin	;
L04 :	Hypothesis ▷	$\mathsf{x} \in \mathbf{N}$	;
L05 :	Hypothesis ▷	$(\mathsf{x}=0) \in \mathbf{T}$	;
L06 :	IfT ▷ L5 ▷	$\mathrm{if}(\mathsf{x}=0,\mathsf{y},f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}+1)) \equiv \mathsf{y}$	;
L07 :	Transitivity ▷ L1 ▷ L6 ▷	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \equiv \mathsf{y}$	;
L08 :	Block ▷	Begin	;
L09 :	Hypothesis ▷	$\mathsf{y} \in \mathbf{N}$	;
L10 :	Reverse' ▷ L7 ▷ L9 ▷	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L11 :	Block ▷	End	;
L12 :	Gen ▷ L2 ▷ L10 ▷	$\forall \mathsf{y} {\in} \mathbf{N}\colon f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L13 :	Block ▷	End	;
L14 :	Block ▷	Begin	;
L15 :	Hypothesis ▷	$\mathsf{x} \in \mathbf{N}$	;
L16 :	Hypothesis ▷	$(\mathsf{x}=0) \in \mathbf{F}$	;
L17 :	Hypothesis ▷	$\forall \mathsf{y} {\in} \mathbf{N}\colon f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L18 :	IfF ▷ L16 ▷	$\mathrm{if}(\mathsf{x}=0,\mathsf{y},f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}+1)) \equiv f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}+1)$	;
L19 :	Transitivity ▷ L1 ▷ L18 ▷	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \equiv f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}+1)$	;
L20 :	Block ▷	Begin	;
L21 :	Hypothesis ▷	$\mathsf{y} \in \mathbf{N}$	;
L22 :	TypeNumeralInZ ▷	$1 \in \mathbf{N}$	;
L23 :	TypeN+N ▷ L21 ▷ L22 ▷	$\mathsf{y}+1 \in \mathbf{N}$	;
L24 :	ElimAll ▷ L2 ▷ L17 ▷ L23 ▷	$f(\mathsf{x}-1,\mathsf{y}+1) \in \mathbf{N}$	;
L25 :	Reverse' ▷ L19 ▷ L24 ▷	$f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L26 :	Block ▷	End	;
L27 :	Gen ▷ L2 ▷ L25 ▷	$\forall \mathsf{y} {\in} \mathbf{N}\colon f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	;
L28 :	Block ▷	End	;
L29 :	Induction ▷ L12 ▷ L27 ▷	$\mathsf{x} \in \mathbf{N} \rightarrow \forall \mathsf{y} {\in} \mathbf{N}\colon f(\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbf{N}$	]

$[\,\mathrm{C}\,]^{\cdot}$ rule C