Logiweb codex of EquivalenceRelations

x, EquivalenceRelations, $(\cdots)$, Objekt-var, Ex-var, Ph-var, Værdi, Variabel, Op$(*)$, Op$(*,*)$, $* \ddot{=} *$, ContainsEmpty$(*)$, Dedu$(*,*)$, $\mathrm{Dedu}_0(*,*)$, $\mathrm{Dedu}_s(*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_1(*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_2(*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_3(*,*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_4(*,*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_4^*(*,*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_5(*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_6(*,*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_6^*(*,*,*,*)$, $\mathrm{Dedu}_7(*)$, $\mathrm{Dedu}_8(*,*)$, $\mathrm{Dedu}_8^*(*,*)$, Ex_1, Ex_2, Ex_{10}, Ex_{20}, $*_{\mathrm{Ex}}$, $*^{\mathrm{Ex}}$, $\langle * \equiv * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}}$, $\langle * \equiv^0 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}}$, $\langle * \equiv^1 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}}$, $\langle * \equiv^* * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}}$, ph_1, ph_2, ph_3, $*_{\mathrm{Ph}}$, $*^{\mathrm{Ph}}$, $\langle * \equiv * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ph}}$, $\langle * \equiv^0 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ph}}$, $\langle * \equiv^1 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ph}}$, $\langle * \equiv^* * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ph}}$, bs, OBS, $\mathcal{BS}$, Ø, ZFsub, MP, Gen, Repetition, Neg, Ded, ExistIntro, Extensionality, Ødef, PairDef, UnionDef, PowerDef, SeparationDef, CheatAllDisjoint, AddDoubleNeg, RemoveDoubleNeg, AndCommutativity, AutoImply, Contrapositive, FirstConjunct, SecondConjunct, FromContradiction, FromDisjuncts, IffCommutativity, IffFirst, IffSecond, ImplyTransitivity, JoinConjuncts, MP2, MP3, MP4, MP5, MT, NegativeMT, Technicality, Weakening, WeakenOr1, WeakenOr2, Formula2Pair, Pair2Formula, Formula2Union, Union2Formula, Formula2Sep, Sep2Formula, SubsetInPower, HelperPowerIsSub, PowerIsSub, (Switch)HelperPowerIsSub, (Switch)PowerIsSub, ToSetEquality, HelperToSetEquality(t), ToSetEquality(t), HelperFromSetEquality, FromSetEquality, HelperReflexivity, Reflexivity, HelperSymmetry, Symmetry, HelperTransitivity, Transitivity, ERisReflexive, ERisSymmetric, ERisTransitive, ØisSubset, HelperMemberNotØ, MemberNotØ, HelperUniqueØ, UniqueØ, =Reflexivity, =Symmetry, Helper=Transitivity, =Transitivity, HelperTransferNotEq, TransferNotEq, HelperPairSubset, Helper(2)PairSubset, PairSubset, SamePair, SameSingleton, UnionSubset, SameUnion, SeparationSubset, SameSeparation, SameBinaryUnion, IntersectionSubset, SameIntersection, AutoMember, HelperEqSysNotØ, EqSysNotØ, HelperEqSubset, EqSubset, HelperEqNecessary, EqNecessary, HelperNoneEqNecessary, Helper(2)NoneEqNecessary, NoneEqNecessary, EqClassIsSubset, EqClassesAreDisjoint, AllDisjoint, AllDisjointImply, BSsubset, Union(BS/R)subset, UnionIdentity, EqSysIsPartition, $*/*$, $* \cap *$, $\cup *$, $* \cup *$, P$(*)$, $\{*\}$, $\{*,*\}$, $\langle *,* \rangle$, $* \in *$, $*(*,*)$, ReflRel$(*,*)$, SymRel$(*,*)$, TransRel$(*,*)$, EqRel$(*,*)$, $[* \in *]_*$, Partition$(*,*)$, $* = *$, $* \subseteq *$, $\dot{\neg} *$, $* \notin *$, $* \neq *$, $* \dot{\wedge} *$, $* \dot{\vee} *$, $* \dot{\Leftrightarrow} *$, $\{\mathrm{ph} \in * \mid *\}$,

x

$[\mathsf{x} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{x} \ddot{=} \mathsf{y}]\rceil)]$

$[\mathsf{x} \stackrel{\text{val}}{\to} \mathsf{y}]$

EquivalenceRelations

[EquivalenceRelations $\stackrel{\text{prio}}{\rightarrow}$

Preassociative

[EquivalenceRelations], [base], [bracket $*$ end bracket], [big bracket $*$ end bracket], [\$ $*$ \$], [**flush left** [$*$]], [x], [y], [z], [[$* \bowtie *$]], [[$* \stackrel{*}{\rightarrow} *$]], [pyk], [tex], [name], [prio], [$*$], [T], [if($*,*,*$)], [[$* \stackrel{*}{\Rightarrow} *$]], [val], [claim], [$\bot$], [f($*$)], [$(*)^{\mathrm{I}}$], [F], [$\underline{0}$], [$\underline{1}$], [$\underline{2}$], [$\underline{3}$], [$\underline{4}$], [$\underline{5}$], [$\underline{6}$], [$\underline{7}$], [$\underline{8}$], [$\underline{9}$], [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [a], [b], [c], [d], [e], [f], [g], [h], [i], [j], [k], [l], [m], [n], [o], [p], [q], [r], [s], [t], [u], [v], [w], [$(*)^{\mathrm{M}}$], [If($*,*,*$)], [array{$*$} $*$ end array], [l], [c], [r], [empty], [$\langle * \mid * := * \rangle$], [$\mathcal{M}(*)$], [$\tilde{\mathcal{U}}(*)$], [$\mathcal{U}(*)$], [$\mathcal{U}^{\mathrm{M}}(*)$], [**apply**($*,*$)], [$\mathbf{apply}_1(*,*)$], [identifier($*$)], [$\text{identifier}_1(*,*)$], [array-plus($*,*$)], [array-remove($*,*,*$)], [array-put($*,*,*,*$)], [array-add($*,*,*,*,*$)], [bit($*,*$)], [$\text{bit}_1(*,*)$], [rack], ["vector"], ["bibliography"], ["dictionary"], ["body"], ["codex"], ["expansion"], ["code"], ["cache"], ["diagnose"], ["pyk"], ["tex"], ["texname"], ["value"], ["message"], ["macro"], ["definition"], ["unpack"], ["claim"], ["priority"], ["lambda"], ["apply"], ["true"], ["if"], ["quote"], ["proclaim"], ["define"], ["introduce"], ["hide"], ["pre"], ["post"], [$\mathcal{E}(*,*,*)$], [$\mathcal{E}_2(*,*,*,*,*)$], [$\mathcal{E}_3(*,*,*,*)$], [$\mathcal{E}_4(*,*,*,*)$], [**lookup**($*,*,*$)], [**abstract**($*,*,*,*$)], [[$\lceil * \rceil$]], [$\mathcal{M}(*,*,*)$], [$\mathcal{M}_2(*,*,*,*)$], [$\mathcal{M}^*(*,*,*)$], [macro], [s_0], [**zip**($*,*$)], [$\mathbf{assoc}_1(*,*,*)$], [$(*)^{\mathbf{P}}$], [self], [[$* \stackrel{..}{=} *$]], [[$* \doteq *$]], [[$* \stackrel{\prime}{=} *$]], [[$* \stackrel{\text{pyk}}{=} *$]], [[$* \stackrel{\text{tex}}{=} *$]], [[$* \stackrel{\text{name}}{=} *$]], [**Priority table**[$*$]], [$\tilde{\mathcal{M}}_1$], [$\tilde{\mathcal{M}}_2(*)$], [$\tilde{\mathcal{M}}_3(*)$], [$\tilde{\mathcal{M}}_4(*,*,*,*)$], [$\tilde{\mathcal{M}}(*,*,*)$], [$\tilde{\mathcal{Q}}(*,*,*)$], [$\tilde{\mathcal{Q}}_2(*,*,*)$], [$\tilde{\mathcal{Q}}_3(*,*,*,*)$], [$\tilde{\mathcal{Q}}^*(*,*,*)$], [($*$)], [($*$)], [display($*$)], [statement($*$)], [$[*]^{\cdot}$], [$[*]^{-}$], [**aspect**($*,*$)], [**aspect**($*,*,*$)], [$\langle * \rangle$], [$\mathbf{tuple}_1(*)$], [$\mathbf{tuple}_2(*)$], [$\text{let}_2(*,*)$], [$\text{let}_1(*,*)$], [[$* \stackrel{\text{claim}}{=} *$]], [checker], [**check**($*,*$)], [$\mathbf{check}_2(*,*,*)$], [$\mathbf{check}_3(*,*,*)$], [$\mathbf{check}^*(*,*)$], [$\mathbf{check}^*_2(*,*,*)$], [$[*]^{\cdot}$], [$[*]^{-}$], [$[*]^{\circ}$], [msg], [[$* \stackrel{\text{msg}}{=} *$]], [<stmt>], [stmt], [[$* \stackrel{\text{stmt}}{=} *$]], [HeadNil′], [HeadPair′], [Transitivity′], [$\perp\!\!\!\perp$], [Contra′], [T'_{E}], [L_1], [$\underline{*}$], [$\mathcal{A}$], [$\mathcal{B}$], [$\mathcal{C}$], [$\mathcal{D}$], [$\mathcal{E}$], [$\mathcal{F}$], [$\mathcal{G}$], [$\mathcal{H}$], [$\mathcal{I}$], [$\mathcal{J}$], [$\mathcal{K}$], [$\mathcal{L}$], [$\mathcal{M}$], [$\mathcal{N}$], [$\mathcal{O}$], [$\mathcal{P}$], [$\mathcal{Q}$], [$\mathcal{R}$], [$\mathcal{S}$], [$\mathcal{T}$], [$\mathcal{U}$], [$\mathcal{V}$], [$\mathcal{W}$], [$\mathcal{X}$], [$\mathcal{Y}$], [$\mathcal{Z}$], [$\langle * \mid * := * \rangle$], [$\langle^* * \mid * := * \rangle$], [$\emptyset$], [Remainder], [$(*)^{\mathbf{v}}$], [intro($*,*,*,*$)], [intro($*,*,*$)], [error($*,*$)], [$\text{error}_2(*,*)$], [proof($*,*,*$)], [$\text{proof}_2(*,*)$], [$\mathcal{S}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{\mathrm{I}}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{\rhd}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{\rhd}_1(*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{\mathrm{E}}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{\mathrm{E}}_1(*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{+}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{+}_1(*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{-}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{-}_1(*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{*}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{*}_1(*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{*}_2(*,*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{@}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{@}_1(*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{\vdash}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{\vdash}_1(*,*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{\Vdash}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{\Vdash}_1(*,*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{\text{i.e.}}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{\text{i.e.}}_1(*,*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{\text{i.e.}}_2(*,*,*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{\forall}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{\forall}_1(*,*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{;}(*,*)$], [$\mathcal{S}^{;}_1(*,*,*)$], [$\mathcal{S}^{;}_2(*,*,*,*)$], [$\mathcal{T}(*)$], [claims($*,*,*$)], [$\text{claims}_2(*,*,*)$], [<proof>], [proof], [[**Lemma** $*$: $*$]], [[**Proof of** $*$: $*$]], [[$*$ **lemma** $*$: $*$]], [[$*$ **antilemma** $*$: $*$]], [[$*$ **rule** $*$: $*$]], [[$*$ **antirule** $*$: $*$]], [verifier], [$\mathcal{V}_1(*)$], [$\mathcal{V}_2(*,*)$], [$\mathcal{V}_3(*,*,*,*)$], [$\mathcal{V}_4(*,*)$], [$\mathcal{V}_5(*,*,*,*)$], [$\mathcal{V}_6(*,*,*,*)$], [$\mathcal{V}_7(*,*,*,*)$], [Cut($*,*$)], [$\text{Head}_{\oplus}(*)$], [$\text{Tail}_{\oplus}(*)$], [$\text{rule}_1(*,*)$], [rule($*,*$)], [Rule tactic], [Plus($*,*$)], [[**Theory** $*$]], [$\text{theory}_2(*,*)$], [$\text{theory}_3(*,*)$], [$\text{theory}_4(*,*,*)$], [HeadNil″], [HeadPair″], [Transitivity″], [Contra″], [HeadNil], [HeadPair], [Transitivity], [Contra], [T_{E}], [ragged right], [ragged right expansion], [parm($*,*,*$)], [$\text{parm}^*(*,*,*)$], [inst($*,*$)], [$\text{inst}^*(*,*)$], [occur($*,*,*$)],

[$\mathrm{occur}^*(*,*,*)$], [$\mathrm{unify}(* = *,*)$], [$\mathrm{unify}^*(* = *,*)$], [$\mathrm{unify}_2(* = *,*)$], [$\mathrm{L_a}$], [$\mathrm{L_b}$], [$\mathrm{L_c}$], [$\mathrm{L_d}$], [$\mathrm{L_e}$], [$\mathrm{L_f}$], [$\mathrm{L_g}$], [$\mathrm{L_h}$], [$\mathrm{L_i}$], [$\mathrm{L_j}$], [$\mathrm{L_k}$], [$\mathrm{L_l}$], [$\mathrm{L_m}$], [$\mathrm{L_n}$], [$\mathrm{L_o}$], [$\mathrm{L_p}$], [$\mathrm{L_q}$], [$\mathrm{L_r}$], [$\mathrm{L_s}$], [$\mathrm{L_t}$], [$\mathrm{L_u}$], [$\mathrm{L_v}$], [$\mathrm{L_w}$], [$\mathrm{L_x}$], [$\mathrm{L_y}$], [$\mathrm{L_z}$], [$\mathrm{L_A}$], [$\mathrm{L_B}$], [$\mathrm{L_C}$], [$\mathrm{L_D}$], [$\mathrm{L_E}$], [$\mathrm{L_F}$], [$\mathrm{L_G}$], [$\mathrm{L_H}$], [$\mathrm{L_I}$], [$\mathrm{L_J}$], [$\mathrm{L_K}$], [$\mathrm{L_L}$], [$\mathrm{L_M}$], [$\mathrm{L_N}$], [$\mathrm{L_O}$], [$\mathrm{L_P}$], [$\mathrm{L_Q}$], [$\mathrm{L_R}$], [$\mathrm{L_S}$], [$\mathrm{L_T}$], [$\mathrm{L_U}$], [$\mathrm{L_V}$], [$\mathrm{L_W}$], [$\mathrm{L_X}$], [$\mathrm{L_Y}$], [$\mathrm{L_Z}$], [$\mathrm{L_?}$], [Reflexivity], [$\mathrm{Reflexivity}_1$], [Commutativity], [$\mathrm{Commutativity}_1$], [<tactic>], [tactic], [[$* \stackrel{\text{tactic}}{=} *$]], [$\mathcal{P}(*,*,*)$], [$\mathcal{P}^*(*,*,*)$], [$\mathrm{p}_0$], [$\mathrm{conclude}_1(*,*)$], [$\mathrm{conclude}_2(*,*,*)$], [$\mathrm{conclude}_3(*,*,*,*)$], [$\mathrm{conclude}_4(*,*)$], [check], [[$* \stackrel{\circ}{=} *$]], [RootVisible($*$)], [A], [R], [C], [T], [L], [$\{*\}$], [$\overline{*}$], [a], [b], [c], [d], [e], [f], [g], [h], [i], [j], [k], [l], [m], [n], [o], [p], [q], [r], [s], [t], [u], [v], [w], [x], [y], [z], [$\langle * \equiv * \mid * := * \rangle$], [$\langle * \equiv^0 * \mid * := * \rangle$], [$\langle * \equiv^1 * \mid * := * \rangle$], [$\langle * \equiv^* * \mid * := * \rangle$], [$\mathrm{Ded}(*,*)$], [$\mathrm{Ded}_0(*,*)$], [$\mathrm{Ded}_1(*,*,*)$], [$\mathrm{Ded}_2(*,*,*)$], [$\mathrm{Ded}_3(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Ded}_4(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Ded}_4^*(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Ded}_5(*,*,*)$], [$\mathrm{Ded}_6(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Ded}_6^*(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Ded}_7(*)$], [$\mathrm{Ded}_8(*,*)$], [$\mathrm{Ded}_8^*(*,*)$], [S], [Neg], [MP], [Gen], [Ded], [S1], [S2], [S3], [S4], [S5], [S6], [S7], [S8], [S9], [Repetition], [A1′], [A2′], [A4′], [A5′], [Prop 3.2a], [Prop 3.2b], [Prop 3.2c], [Prop 3.2d], [Prop 3.2e_1], [Prop 3.2e_2], [Prop 3.2e], [Prop 3.2f_1], [Prop 3.2f_2], [Prop 3.2f], [Prop 3.2g_1], [Prop 3.2g_2], [Prop 3.2g], [Prop 3.2h_1], [Prop 3.2h_2], [Prop 3.2h], [$\mathrm{Block}_1(*,*,*)$], [$\mathrm{Block}_2(*)$], [$(\cdots)$], [`Objekt-var`], [`Ex-var`], [`Ph-var`], [`Værdi`], [`Variabel`], [$\mathrm{Op}(*)$], [$\mathrm{Op}(*,*)$], [$* \ddot{=} *$], [ContainsEmpty($*$)], [$\mathrm{Dedu}(*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_0(*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_\mathrm{s}(*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_1(*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_2(*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_3(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_4(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_4^*(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_5(*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_6(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_6^*(*,*,*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_7(*)$], [$\mathrm{Dedu}_8(*,*)$], [$\mathrm{Dedu}_8^*(*,*)$], [$\mathrm{Ex}_1$], [$\mathrm{Ex}_2$], [$\mathrm{Ex}_{10}$], [$\mathrm{Ex}_{20}$], [$*_\mathrm{Ex}$], [$*^\mathrm{Ex}$], [$\langle * \equiv * \mid * := * \rangle_\mathrm{Ex}$], [$\langle * \equiv^0 * \mid * := * \rangle_\mathrm{Ex}$], [$\langle * \equiv^1 * \mid * := * \rangle_\mathrm{Ex}$], [$\langle * \equiv^* * \mid * := * \rangle_\mathrm{Ex}$], [$\mathrm{ph}_1$], [$\mathrm{ph}_2$], [$\mathrm{ph}_3$], [$*_\mathrm{Ph}$], [$*^\mathrm{Ph}$], [$\langle * \equiv * \mid * := * \rangle_\mathrm{Ph}$], [$\langle * \equiv^0 * \mid * := * \rangle_\mathrm{Ph}$], [$\langle * \equiv^1 * \mid * := * \rangle_\mathrm{Ph}$], [$\langle * \equiv^* * \mid * := * \rangle_\mathrm{Ph}$], [bs], [OBS], [$\mathcal{BS}$], [Ø], [ZFsub], [MP], [Gen], [Repetition], [Neg], [Ded], [ExistIntro], [Extensionality], [Ødef], [PairDef], [UnionDef], [PowerDef], [SeparationDef], [CheatAllDisjoint], [AddDoubleNeg], [RemoveDoubleNeg], [AndCommutativity], [AutoImply], [Contrapositive], [FirstConjunct], [SecondConjunct], [FromContradiction], [FromDisjuncts], [IffCommutativity], [IffFirst], [IffSecond], [ImplyTransitivity], [JoinConjuncts], [MP2], [MP3], [MP4], [MP5], [MT], [NegativeMT], [Technicality], [Weakening], [WeakenOr1], [WeakenOr2], [Formula2Pair], [Pair2Formula], [Formula2Union], [Union2Formula], [Formula2Sep], [Sep2Formula], [SubsetInPower], [HelperPowerIsSub], [PowerIsSub], [(Switch)HelperPowerIsSub], [(Switch)PowerIsSub], [ToSetEquality], [HelperToSetEquality(t)], [ToSetEquality(t)], [HelperFromSetEquality], [FromSetEquality], [HelperReflexivity], [Reflexivity], [HelperSymmetry], [Symmetry], [HelperTransitivity], [Transitivity], [ERisReflexive], [ERisSymmetric], [ERisTransitive], [ØisSubset], [HelperMemberNotØ], [MemberNotØ], [HelperUniqueØ], [UniqueØ], [=Reflexivity], [=Symmetry], [Helper=Transitivity], [=Transitivity], [HelperTransferNotEq], [TransferNotEq], [HelperPairSubset], [Helper(2)PairSubset], [PairSubset], [SamePair], [SameSingleton], [UnionSubset], [SameUnion], [SeparationSubset], [SameSeparation], [SameBinaryUnion], [IntersectionSubset], [SameIntersection], [AutoMember], [HelperEqSysNotØ], [EqSysNotØ], [HelperEqSubset],

[EqSubset], [HelperEqNecessary], [EqNecessary], [HelperNoneEqNecessary], [Helper(2)NoneEqNecessary], [NoneEqNecessary], [EqClassIsSubset], [EqClassesAreDisjoint], [AllDisjoint], [AllDisjointImply], [BSsubset], [Union(BS/R)subset], [UnionIdentity], [EqSysIsPartition];

Preassociative

[*_{*}], [*/indexintro(*, *, *, *)], [*/intro(*, *, *)], [*/bothintro(*, *, *, *, *)], [*/nameintro(*, *, *, *)], [$*'$], [*[*]], [*[*→*]], [*[*⇒*]], [*0], [*1], [0b], [*-color(*)], [*-color*(*)], [$*^{H}$], [$*^{T}$], [$*^{U}$], [$*^{h}$], [$*^{t}$], [$*^{s}$], [$*^{c}$], [$*^{d}$], [$*^{a}$], [$*^{C}$], [$*^{M}$], [$*^{B}$], [$*^{r}$], [$*^{i}$], [$*^{d}$], [$*^{R}$], [$*^{0}$], [$*^{1}$], [$*^{2}$], [$*^{3}$], [$*^{4}$], [$*^{5}$], [$*^{6}$], [$*^{7}$], [$*^{8}$], [$*^{9}$], [$*^{E}$], [$*^{\mathcal{V}}$], [$*^{\mathcal{C}}$], [$*^{\mathcal{C}^*}$], [$*^{hide}$];

Preassociative

[“ * ”], [], [$(*)^{\mathbf{t}}$], [string(*) + *], [string(*) ++ *], [
*], [*], [!*], ["*], [#*], [$*], [%*], [&*], [’*], [(*], [)*], [**], [+*], [, *], [-*], [.*], [/*], [0*], [1*], [2*], [3*], [4*], [5*], [6*], [7*], [8*], [9*], [:*], [; *], [<*], [=*], [>*], [?*], [@*], [A*], [B*], [C*], [D*], [E*], [F*], [G*], [H*], [I*], [J*], [K*], [L*], [M*], [N*], [O*], [P*], [Q*], [R*], [S*], [T*], [U*], [V*], [W*], [X*], [Y*], [Z*], [[*], [*], []*], [^*], [_*], [‘*], [a*], [b*], [c*], [d*], [e*], [f*], [g*], [h*], [i*], [j*], [k*], [l*], [m*], [n*], [o*], [p*], [q*], [r*], [s*], [t*], [u*], [v*], [w*], [x*], [y*], [z*], [{*], [|*], [}*], [~*], [**Preassociative** *; *], [**Postassociative** *; *], [[*], *], [priority * end], [newline *], [macro newline *], [MacroIndent(*)];

Preassociative

[* ’ *], [* ‘ *];

Preassociative

[$*'$];

Preassociative

[*/*], [$* \cap *$];

Preassociative

[$\cup *$], [$* \cup *$], [P(*)];

Preassociative

[{*}];

Preassociative

[{*, *}], [$\langle *, * \rangle$];

Preassociative

[$* \in *$], [*(*, *)], [ReflRel(*, *)], [SymRel(*, *)], [TransRel(*, *)], [EqRel(*, *)], [$[* \in *]_*$], [Partition(*, *)];

Preassociative

[$* \cdot *$], [$* \cdot_0 *$];

Preassociative

[$* + *$], [$* +_0 *$], [$* +_1 *$], [$* - *$], [$* -_0 *$], [$* -_1 *$];

Preassociative

[$* \cup \{*\}$], [$* \cup *$], [$* \setminus \{*\}$];

Postassociative

[$* \therefore *$], [$* \underline{\therefore} *$], [$* \underline{::} *$], [$* \underline{+2*} *$], [$* :: *$], [$* +2* *$];

Postassociative

[*, *];

Preassociative

$[* \overset{B}{\approx} *], [* \overset{D}{\approx} *], [* \overset{C}{\approx} *], [* \overset{P}{\approx} *], [* \approx *], [* = *], [* \overset{+}{\rightarrow} *], [* \overset{t}{=} *], [* \overset{t^*}{=} *], [* \overset{r}{=} *],$
$[* \in_t *], [* \subseteq_T *], [* \overset{T}{=} *], [* \overset{s}{=} *], [* \text{ free in } *], [* \text{ free in}^* *], [* \text{ free for } * \text{ in } *],$
$[* \text{ free for}^* * \text{ in } *], [* \in_c *], [* < *], [* <' *], [* \leq' *], [* = *], [* \neq *], [*^{\text{var}}],$
$[* \#^0 *], [* \#^1 *], [* \#^* *], [* {=} *], [* \subseteq *];$
Preassociative
$[\neg *], [\dot{\neg} *], [* \notin *], [* \neq *];$
Preassociative
$[* \wedge *], [* \ddot{\wedge} *], [* \tilde{\wedge} *], [* \wedge_c *], [* \dot{\wedge} *];$
Preassociative
$[* \vee *], [* \parallel *], [* \ddot{\vee} *], [* \dot{\vee} *];$
Preassociative
$[\exists * \colon *], [\forall * \colon *], [\forall_{\text{obj}} * \colon *];$
Postassociative
$[* \ddot{\Rightarrow} *], [* \Rightarrow *], [* \Leftrightarrow *], [* \dot{\Leftrightarrow} *];$
Preassociative
$[\{\text{ph} \in * \mid *\}];$
Postassociative
$[* : *], [* \text{ spy } *], [* ! *];$
Preassociative
$[* \begin{cases} * \\ * \end{cases}];$
Preassociative
$[\lambda * . *], [\Lambda * . *], [\Lambda *], [\textbf{if } * \textbf{ then } * \textbf{ else } *], [\textbf{let } * = * \textbf{ in } *], [\textbf{let } * \ddot{=} * \text{ in } *];$
Preassociative
$[* \# *];$
Preassociative
$[*^{\text{I}}], [*^{\triangleright}], [*^{\text{V}}], [*^{+}], [*^{-}], [*^{*}];$
Preassociative
$[* @ *], [* \triangleright *], [* \gg *], [* \gg *], [* \trianglerighteq *];$
Postassociative
$[* \vdash *], [* \Vdash *], [* \text{ i.e. } *];$
Preassociative
$[\forall * \colon *], [\Pi * \colon *];$
Postassociative
$[* \oplus *];$
Postassociative
$[*; *];$
Preassociative
$[* \text{ proves } *];$
Preassociative
$[* \textbf{ proof of } * : *], [\text{Line} * : * \gg *; *], [\text{Last line} * \gg * \square],$
$[\text{Line} * : \text{Premise} \gg *; *], [\text{Line} * : \text{Side-condition} \gg *; *], [\text{Arbitrary} \gg *; *],$
$[\text{Local} \gg * = *; *], [\text{Begin} *; * : \text{End}; *], [\text{Last block line} * \gg *;],$
$[\text{Arbitrary} \gg *; *];$
Postassociative

[∗ | ∗];
Postassociative
[∗ , ∗], [∗[∗]∗];
Preassociative
[∗&∗];
Preassociative
[∗\\∗], [∗ linebreak[4] ∗], [∗\\∗];]

[EquivalenceRelations $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "EquivalenceRelations"]

[EquivalenceRelations $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "equivalence-relations"]

$(\cdots)$

[$(\cdots)$ $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "(\cdots{})"]

[$(\cdots)$ $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "cdots"]

`Objekt-var`

[`Objekt-var` $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "\texttt{Objekt-var}"]

[`Objekt-var` $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "object-var"]

`Ex-var`

[`Ex-var` $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "\texttt{Ex-var}"]

[`Ex-var` $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "ex-var"]

`Ph-var`

[`Ph-var` $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "\texttt{Ph-var}"]

[`Ph-var` $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "ph-var"]

`Værdi`

[`Værdi` $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "\texttt{V\ae{}rdi}"]

[`Værdi` $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "vaerdi"]

Variabel

$[\texttt{Variabel} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "\texttt{Variabel}"]

$[\texttt{Variabel} \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "variabel"]

Op(∗)

$[\mathrm{Op}(\mathsf{x}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "Op(#1.
)"]

$[\mathrm{Op}(*) \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "op " end op"]

Op(∗, ∗)

$[\mathrm{Op}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "Op(#1.
, #2.
)"]

$[\mathrm{Op}(*, *) \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "op2 " comma " end op2"]

$* \ddot{=} *$

$[\mathsf{x} \ddot{=} \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel {\ddot {=}} #2."]

$[* \ddot{=} * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "define-equal " comma " end equal"]

ContainsEmpty(∗)

$[\mathrm{ContainsEmpty}(\mathsf{x}) \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathrm{ContainsEmpty}(\mathsf{x}) \ddot{=} \{\mathrm{ph} \in \mathsf{x} \mid \emptyset \in \mathrm{ph}_1\}] \rceil)]$

$[\mathrm{ContainsEmpty}(\mathsf{x}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "ContainsEmpty(#1.
)"]

$[\mathrm{ContainsEmpty}(*) \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "contains-empty " end empty"]

$\mathrm{Dedu}(*, *)$

$[\mathrm{Dedu}(\mathsf{p}, \mathsf{c}) \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathrm{Dedu}(\mathsf{p}, \mathsf{c}) \ddot{=} \lambda \mathsf{x}.\mathrm{Dedu}_0(\lceil \mathsf{p} \rceil, \lceil \mathsf{c} \rceil)] \rceil)]$

$[\mathrm{Dedu}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "
Dedu(#1.
, #2.
)"]

$[\mathrm{Dedu}(*, *) \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "1deduction " conclude " end 1deduction"]

$\mathrm{Dedu}_0(*, *)$

$[\mathrm{Dedu}_0(\mathsf{p}, \mathsf{c}) \stackrel{\text{val}}{\to} \mathsf{c}!\mathrm{If}(\mathrm{Dedu}_8(\mathsf{p}, \mathsf{T}), \mathrm{Dedu}_s(\mathrm{Dedu}_7(\mathsf{p}), \mathsf{c}, \mathsf{T}), \mathsf{F})]$

$[\mathrm{Dedu}_0(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "
Dedu_0(#1.
, #2.
)"]

$[\mathrm{Dedu}_0(*, *) \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "1deduction zero " conclude " end 1deduction"]

$\mathrm{Dedu}_s(*, *, *)$

$[\mathrm{Dedu}_s(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{s}) \stackrel{\text{val}}{\to} \mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\text{r}}{=} \lceil \mathsf{x} \Vdash \mathsf{y} \rceil, \mathsf{c} \stackrel{\text{r}}{=} \lceil \mathsf{x} \Vdash \mathsf{y} \rceil \wedge \mathsf{p}^1 \stackrel{\text{t}}{=} \mathsf{c}^1 \wedge \mathrm{Dedu}_s(\mathsf{p}^2, \mathsf{c}^2, \mathsf{c}^1 :: \mathsf{s}),$
$\mathrm{Dedu}_1(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{s}))]$

$[\mathrm{Dedu}_s(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "Dedu_{s}(#1.
, #2.
, #3.
)"]

$[\mathrm{Dedu}_s(*, *, *) \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "1deduction side " conclude " condition " end 1deduction"]

$\mathrm{Dedu}_1(*, *, *)$

$[\mathrm{Dedu}_1(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{s}) \stackrel{\text{val}}{\to} \mathrm{If}(\mathsf{c} \stackrel{\text{r}}{=} \lceil \mathsf{x} \Vdash \mathsf{y} \rceil, \mathrm{Dedu}_1(\mathsf{p}, \mathsf{c}^2, \mathsf{c}^1 :: \mathsf{s}), \mathrm{Dedu}_2(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{s}))]$

$[\mathrm{Dedu}_1(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "
Dedu_1(#1.
, #2.
, #3.
)"]

[$\mathrm{Dedu}_1(*,*,*) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "1deduction one " conclude " condition " end 1deduction"]

$\mathrm{Dedu}_2(*,*,*)$

[$\mathrm{Dedu}_2(\mathsf{p},\mathsf{c},\mathsf{s}) \stackrel{\mathrm{val}}{\rightarrow} \mathsf{s}!\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \mathsf{x} \vdash \mathsf{y} \rceil \wedge \mathsf{c} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \mathsf{x} \Rightarrow \mathsf{y} \rceil \begin{cases} \mathrm{Dedu}_3(\mathsf{p}^1,\mathsf{c}^1,\mathsf{s},\mathsf{T}) \wedge \mathrm{Dedu}_2(\mathsf{p}^2,\mathsf{c}^2,\mathsf{s}) \\ \mathrm{Dedu}_4(\mathsf{p},\mathsf{c},\mathsf{s},\mathrm{Dedu}_6(\mathsf{p},\mathsf{c},\mathsf{T},\mathsf{T})) \end{cases}$]

[$\mathrm{Dedu}_2(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "
Dedu_2(#1.
, #2.
, #3.
)"]

[$\mathrm{Dedu}_2(*,*,*) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "1deduction two " conclude " condition " end 1deduction"]

$\mathrm{Dedu}_3(*,*,*,*)$

[$\mathrm{Dedu}_3(\mathsf{p},\mathsf{c},\mathsf{s},\mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{val}}{\rightarrow} \mathrm{If}(\neg \mathsf{c} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \forall_{\mathrm{obj}} \mathsf{x} \colon \mathsf{y} \rceil, \mathrm{Dedu}_4(\mathsf{p},\mathsf{c},\mathsf{s},\mathsf{b}),$
$\mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \forall_{\mathrm{obj}} \mathsf{x} \colon \mathsf{y} \rceil \wedge \mathsf{p}^1 \stackrel{\mathrm{t}}{=} \mathsf{c}^1, \mathrm{Dedu}_4(\mathsf{p},\mathsf{c},\mathsf{s},\mathsf{b}), \mathrm{Dedu}_3(\mathsf{p},\mathsf{c}^2,\mathsf{s},\mathsf{c}^1 :: \mathsf{c}^1 :: \mathsf{b})))$]

[$\mathrm{Dedu}_3(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z},\mathsf{u}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "
Dedu_3(#1.
, #2.
, #3.
, #4.
)"]

[$\mathrm{Dedu}_3(*,*,*,*) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "1deduction three " conclude " condition " bound " end 1deduction"]

$\mathrm{Dedu}_4(*,*,*,*)$

[$\mathrm{Dedu}_4(\mathsf{p},\mathsf{c},\mathsf{s},\mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{val}}{\rightarrow} \mathsf{s}!\mathsf{b}!\mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \overline{\mathsf{x}} \rceil, \mathbf{lookup}(\mathsf{p},\mathsf{b},\mathsf{T}) \stackrel{\mathrm{t}}{=} \mathsf{c}, \mathrm{If}(\neg \mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \mathsf{c}, \mathsf{F},$
$\mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \forall_{\mathrm{obj}} \mathsf{x} \colon \mathsf{y} \rceil, \mathsf{p}^1 \stackrel{\mathrm{t}}{=} \mathsf{c}^1 \wedge \mathrm{Dedu}_4(\mathsf{p}^2,\mathsf{c}^2,\mathsf{s},\mathsf{p}^1 :: \mathsf{p}^1 :: \mathsf{b}), \mathrm{If}(\neg \mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil,$
$\mathrm{Dedu}_4^*(\mathsf{p}^{\mathrm{t}},\mathsf{c}^{\mathrm{t}},\mathsf{s},\mathsf{b}), \mathsf{p}^1 \stackrel{\mathrm{t}}{=} \mathsf{c}^1 \wedge \mathrm{Dedu}_5(\mathsf{p},\mathsf{s},\mathsf{b})))))$]

[$\mathrm{Dedu}_4(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z},\mathsf{u}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "
Dedu_4(#1.
, #2.
, #3.

, #4.
)”]

[$\mathrm{Dedu}_4(*, *, *, *) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ “1deduction four " conclude " condition " bound " end 1deduction”]

$\mathrm{Dedu}_4^*(*, *, *, *)$

[$\mathrm{Dedu}_4^*(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{s}, \mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{c!s!b!}\mathrm{If}(\mathsf{p}, \mathsf{T}, \mathrm{Dedu}_4(\mathsf{p}^{\mathrm{h}}, \mathsf{c}^{\mathrm{h}}, \mathsf{s}, \mathsf{b}) \wedge \mathrm{Dedu}_4^*(\mathsf{p}^{\mathrm{t}}, \mathsf{c}^{\mathrm{t}}, \mathsf{s}, \mathsf{b}))$]

[$\mathrm{Dedu}_4^*(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \mathsf{u}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ “
Dedu_4^*(#1.
, #2.
, #3.
, #4.
)”]

[$\mathrm{Dedu}_4^*(*, *, *, *) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ “1deduction four star " conclude " condition " bound " end 1deduction”]

$\mathrm{Dedu}_5(*, *, *)$

[$\mathrm{Dedu}_5(\mathsf{p}, \mathsf{s}, \mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{p!s!}\mathrm{If}(\mathsf{b}, \mathsf{T},$
$\lceil\lceil \mathsf{x}\rceil \#^0 \lceil \mathsf{y}\rceil\rceil^{\mathrm{h}} :: \lceil\lceil *\rceil\rceil^{\mathrm{h}} :: \mathsf{b}^{\mathrm{hh}} :: \mathsf{T} :: \lceil\lceil \mathsf{x}\rceil\rceil^{\mathrm{h}} :: \mathsf{p} :: \mathsf{T} :: \mathsf{T} \in_{\mathrm{t}} \mathsf{s} \wedge \mathrm{Dedu}_5(\mathsf{p}, \mathsf{s}, \mathsf{b}^{\mathrm{t}}))$]

[$\mathrm{Dedu}_5(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ “
Dedu_5(#1.
, #2.
, #3.
)”]

[$\mathrm{Dedu}_5(*, *, *) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ “1deduction five " condition " bound " end 1deduction”]

$\mathrm{Dedu}_6(*, *, *, *)$

[$\mathrm{Dedu}_6(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{p!c!b!e!}\mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \overline{\mathsf{x}}\rceil, \mathsf{p} \in_{\mathrm{t}} \mathsf{e} \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{b} \\ \mathsf{p} :: \mathsf{c} :: \mathsf{b} \end{array} \right., \mathrm{If}(\neg \mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \mathsf{c}, \mathsf{T},$
$\mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \underline{\mathsf{a}}\rceil, \mathsf{b}, \mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \forall_{\mathrm{obj}} \mathsf{x}\colon \mathsf{y}\rceil, \mathrm{Dedu}_6(\mathsf{p}^2, \mathsf{c}^2, \mathsf{c}^1 :: \mathsf{e}, \mathsf{b}), \mathrm{Dedu}_6^*(\mathsf{p}^{\mathrm{t}}, \mathsf{c}^{\mathrm{t}}, \mathsf{e}, \mathsf{b})))))$]

[$\mathrm{Dedu}_6(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ “
Dedu_6(#1.
, #2.
, #3.

, #4.
)”]

[$\mathrm{Dedu}_6(*, *, *, *) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ “1deduction six " conclude " exception " bound " end 1deduction”]

$\mathrm{Dedu}_6^*(*, *, *, *)$

[$\mathrm{Dedu}_6^*(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{p!c!b!e!}\mathrm{If}(\mathsf{p}, \mathsf{b}, \mathrm{Dedu}_6^*(\mathsf{p}^{\mathrm{t}}, \mathsf{c}^{\mathrm{t}}, \mathsf{e}, \mathrm{Dedu}_6(\mathsf{p}^{\mathrm{h}}, \mathsf{c}^{\mathrm{h}}, \mathsf{e}, \mathsf{b})))$]

[$\mathrm{Dedu}_6^*(\mathsf{p}, \mathsf{c}, \mathsf{e}, \mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ “
Dedu_6^*(#1.
, #2.
, #3.
, #4.
)”]

[$\mathrm{Dedu}_6^*(*, *, *, *) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ “1deduction six star " conclude " exception " bound " end 1deduction”]

$\mathrm{Dedu}_7(*)$

[$\mathrm{Dedu}_7(\mathsf{p}) \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \forall \mathsf{x}\colon \mathsf{y} \rceil \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Dedu}_7(\mathsf{p}^2) \\ \mathsf{p} \end{array} \right.$]

[$\mathrm{Dedu}_7(\mathsf{p}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ “
Dedu_7(#1.
)”]

[$\mathrm{Dedu}_7(*) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ “1deduction seven " end 1deduction”]

$\mathrm{Dedu}_8(*, *)$

[$\mathrm{Dedu}_8(\mathsf{p}, \mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \forall \mathsf{x}\colon \mathsf{y} \rceil, \mathrm{Dedu}_8(\mathsf{p}^2, \mathsf{p}^1 :: \mathsf{b}), \mathrm{If}(\mathsf{p} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathsf{p} \in_{\mathrm{t}} \mathsf{b}, \mathrm{Dedu}_8^*(\mathsf{p}^{\mathrm{t}}, \mathsf{b})))$]

[$\mathrm{Dedu}_8(\mathsf{p}, \mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ “
Dedu_8(#1.
, #2.
)”]

[$\mathrm{Dedu}_8(*, *) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ “1deduction eight " bound " end 1deduction”]

$\mathrm{Dedu}_8^*(*,*)$

$[\mathrm{Dedu}_8^*(\mathsf{p},\mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{b}!\mathrm{If}(\mathsf{p},\mathsf{T},\mathrm{If}(\mathrm{Dedu}_8(\mathsf{p}^{\mathrm{h}},\mathsf{b}),\mathrm{Dedu}_8^*(\mathsf{p}^{\mathrm{t}},\mathsf{b}),\mathsf{F}))]$

$[\mathrm{Dedu}_8^*(\mathsf{p},\mathsf{b}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "
Dedu_8^*(#1.
, #2.
)"]

$[\mathrm{Dedu}_8^*(*,*) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "1deduction eight star " bound " end 1deduction"]

Ex_1

$[\mathrm{Ex}_1 \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathrm{Ex}_1 \ddot{=} \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}]\rceil)]$

$[\mathrm{Ex}_1 \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "Ex_{1}"]

$[\mathrm{Ex}_1 \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "ex1"]

Ex_2

$[\mathrm{Ex}_2 \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathrm{Ex}_2 \ddot{=} \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}}]\rceil)]$

$[\mathrm{Ex}_2 \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "Ex_{2}"]

$[\mathrm{Ex}_2 \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "ex2"]

Ex_{10}

$[\mathrm{Ex}_{10} \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathrm{Ex}_{10} \ddot{=} \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}}]\rceil)]$

$[\mathrm{Ex}_{10} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "Ex_{10}"]

$[\mathrm{Ex}_{10} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "ex10"]

Ex_{20}

$[\mathrm{Ex}_{20} \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathrm{Ex}_{20} \ddot{=} \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}]\rceil)]$

$[\mathrm{Ex}_{20} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "Ex_{20}"]

$[\mathrm{Ex}_{20} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "ex20"]

$*_{\mathrm{Ex}}$

$[\mathsf{x}_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "#1.
_{Ex}"]

$[*_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "existential var " end var"]

$*^{\mathrm{Ex}}$

$[\mathsf{x}^{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{x} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \mathsf{x}_{\mathrm{Ex}} \rceil]$

$[\mathsf{x}^{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "#1.
^{Ex}"]

$[*^{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "" is existential var"]

$\langle * \equiv * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}}$

$[\langle \mathsf{a} \equiv \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\langle \mathsf{a} \equiv \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}} \ddot{=} \langle \lceil \mathsf{a} \rceil \equiv^0 \lceil \mathsf{b} \rceil | \lceil \mathsf{x} \rceil := \lceil \mathsf{t} \rceil \rangle_{\mathrm{Ex}}] \rceil)]$

$[\langle \mathsf{x} \equiv \mathsf{y} | \mathsf{z} := \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "\langle #1.
{\equiv} #2.
| #3.
{:=} #4.
\rangle_{Ex} "]

$[\langle * \equiv * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "exist-sub " is " where " is " end sub"]

$\langle * \equiv^0 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}}$

$[\langle \mathsf{a} \equiv^0 \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\mathsf{x}^{\mathrm{Ex}} \wedge \langle \mathsf{a} \equiv^1 \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}}]$

$[\langle \mathsf{x} \equiv^0 \mathsf{y} | \mathsf{z} := \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "\langle #1.
{\equiv}^0 #2.
| #3.
{:=} #4.
\rangle_{Ex} "]

$[\langle * \equiv^0 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "exist-sub0 " is " where " is " end sub"]

$\langle * \equiv^1 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}}$

$[\langle \mathsf{a} \equiv^1 \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{a}!\mathsf{x}!\mathsf{t}!$
$\mathrm{If}(\mathsf{b} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \forall_{\mathrm{obj}} \mathsf{u} \colon \mathsf{v} \rceil, \mathsf{F},$
$\mathrm{If}(\mathsf{b}^{\mathrm{Ex}} \wedge \mathsf{b} \stackrel{\mathrm{t}}{=} \mathsf{x}, \mathsf{a} \stackrel{\mathrm{t}}{=} \mathsf{t}, \mathrm{If}($
$\mathsf{a} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \mathsf{b}, \langle \mathsf{a}^{\mathrm{t}} \equiv^* \mathsf{b}^{\mathrm{t}} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}}, \mathsf{F})))]$

$[\langle \mathsf{x} \equiv^1 \mathsf{y} | \mathsf{z} := \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "\langle #1.
{\equiv}^1 #2.
| #3.
{:=} #4.
\rangle_{Ex} "]

$[\langle * \equiv^1 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "exist-sub1 " is " where " is " end sub"]

$\langle * \equiv^* * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}}$

$[\langle \mathsf{a} \equiv^* \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{val}}{\to} \mathsf{b}!\mathsf{x}!\mathsf{t}!\mathrm{If}(\mathsf{a}, \mathsf{T}, \mathrm{If}(\langle \mathsf{a}^{\mathrm{h}} \equiv^1 \mathsf{b}^{\mathrm{h}} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}}, \langle \mathsf{a}^{\mathrm{t}} \equiv^* \mathsf{b}^{\mathrm{t}} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ex}}, \mathsf{F}))]$

$[\langle \mathsf{x} \equiv^* \mathsf{y} | \mathsf{z} := \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "\langle #1.
{\equiv}^* #2.
| #3.
{:=} #4.
\rangle_{Ex} "]

$[\langle * \equiv^* * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ex}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "exist-sub* " is " where " is " end sub"]

ph_1

$[\mathrm{ph}_1 \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathrm{ph}_1 \ddot{=} \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}] \rceil)]$

$[\mathrm{ph}_1 \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "ph_{1}"]

$[\mathrm{ph}_1 \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "placeholder-var1"]

ph_2

$[\mathrm{ph}_2 \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathrm{ph}_2 \ddot{=} \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}] \rceil)]$

$[\mathrm{ph}_2 \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "ph_{2}"]

$[\mathrm{ph}_2 \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "placeholder-var2"]

ph_3

$[\mathrm{ph}_3 \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathrm{ph}_3 \stackrel{..}{=} \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}]\rceil)]$

$[\mathrm{ph}_3 \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "ph_{3}"]

$[\mathrm{ph}_3 \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "placeholder-var3"]

$*_{\mathrm{Ph}}$

$[\mathsf{x}_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
_{Ph} "]

$[*_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "placeholder-var " end var"]

$*^{\mathrm{Ph}}$

$[\mathsf{x}^{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{val}}{\to} \mathsf{x} \stackrel{\text{r}}{=} \lceil \mathsf{x}_{\mathrm{Ph}} \rceil]$

$[\mathsf{x}^{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
^{Ph}"]

$[*^{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" is placeholder-var"]

$\langle * \equiv * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ph}}$

$[\langle \mathsf{a} \equiv \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\langle \mathsf{a} \equiv \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{..}{=}$
$\langle \lceil \mathsf{a} \rceil \equiv^0 \lceil \mathsf{b} \rceil | \lceil \mathsf{x} \rceil := \lceil \mathsf{t} \rceil \rangle_{\mathrm{Ph}}]\rceil)]$

$[\langle \mathsf{x} \equiv \mathsf{y} | \mathsf{z} := \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "\langle #1.
{\equiv} #2.
| #3.
{:=} #4.
\rangle_{Ph} "]

$[\langle * \equiv * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "ph-sub " is " where " is " end sub"]

$\langle * \equiv^0 * \mid * := * \rangle_{\mathrm{Ph}}$

$[\langle \mathsf{a} \equiv^0 \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{val}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\mathsf{x}^{\mathrm{Ph}} \wedge \langle \mathsf{a} \equiv^1 \mathsf{b} | \mathsf{x} := \mathsf{t} \rangle_{\mathrm{Ph}}]$

$[\langle \mathsf{x} \equiv^0 \mathsf{y} | \mathsf{z} := \mathsf{u} \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "\langle #1.
{\equiv}^0 #2.

| #3.
{:=} #4.
\rangle_{Ph} "]

$[\langle *\equiv^0 * \,|\, * := * \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "ph-sub0 " is " where " is " end sub"]

$\langle *\equiv^1 * \,|\, * := * \rangle_{\mathrm{Ph}}$

$[\langle \mathsf{a}\equiv^1\mathsf{b}|\mathsf{x}{:=}\mathsf{t}\rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\mathrm{val}}{\rightarrow} \mathsf{a!x!t!}$
$\mathrm{If}(\mathsf{b} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \lceil \forall_{\mathrm{obj}} \mathsf{u}\colon \mathsf{v} \rceil, \mathsf{F},$
$\mathrm{If}(\mathsf{b}^{\mathrm{Ph}} \wedge \mathsf{b} \stackrel{\mathrm{t}}{=} \mathsf{x}, \mathsf{a} \stackrel{\mathrm{t}}{=} \mathsf{t},$
$\mathrm{If}(\mathsf{b}^{\mathrm{Ex}}, \mathsf{a} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \mathsf{b}, \mathrm{If}($
$\mathsf{a} \stackrel{\mathrm{r}}{=} \mathsf{b}, \langle \mathsf{a}^{\mathrm{t}}\equiv^*\mathsf{b}^{\mathrm{t}}|\mathsf{x}{:=}\mathsf{t}\rangle_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{F}))))]$

$[\langle \mathsf{x}\equiv^1\mathsf{y}|\mathsf{z}{:=}\mathsf{u}\rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "\langle #1.
{\equiv}^1 #2.
| #3.
{:=} #4.
\rangle_{Ph} "]

$[\langle *\equiv^1 * \,|\, * := * \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "ph-sub1 " is " where " is " end sub"]

$\langle *\equiv^* * \,|\, * := * \rangle_{\mathrm{Ph}}$

$[\langle \mathsf{a}\equiv^*\mathsf{b}|\mathsf{x}{:=}\mathsf{t}\rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\mathrm{val}}{\rightarrow} \mathsf{b!x!t!}\mathrm{If}(\mathsf{a}, \mathsf{T}, \mathrm{If}(\langle \mathsf{a}^{\mathrm{h}}\equiv^1\mathsf{b}^{\mathrm{h}}|\mathsf{x}{:=}\mathsf{t}\rangle_{\mathrm{Ph}}, \langle \mathsf{a}^{\mathrm{t}}\equiv^*\mathsf{b}^{\mathrm{t}}|\mathsf{x}{:=}\mathsf{t}\rangle_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{F}))]$

$[\langle \mathsf{x}\equiv^*\mathsf{y}|\mathsf{z}{:=}\mathsf{u}\rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "\langle #1.
{\equiv}^* #2.
| #3.
{:=} #4.
\rangle_{Ph} "]

$[\langle *\equiv^* * \,|\, * := * \rangle_{\mathrm{Ph}} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "ph-sub* " is " where " is " end sub"]

bs

$[\mathsf{bs} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "\mathsf {bs}"]

$[\mathsf{bs} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "var big set"]

OBS

$[\mathsf{OBS} \stackrel{\mathrm{macro}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{OBS} \ddot{=} \overline{\mathsf{bs}}]\rceil)]$

$[\mathsf{OBS} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ " \mathsf {OBS}"]

$[\mathsf{OBS} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "object big set"]

$\mathcal{BS}$

$[\mathcal{BS} \stackrel{\mathrm{macro}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathcal{BS} \ddot{=} \underline{\mathsf{bs}}]\rceil)]$

$[\mathcal{BS} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "{\cal BS}"]

$[\mathcal{BS} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "meta big set"]

Ø

$[\emptyset \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "\mathrm{\O}"]

$[\emptyset \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "zermelo empty set"]

ZFsub

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{ZFsub} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \dot\neg\, \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot\neg\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot\neg\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \\
&\dot\neg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot\neg\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot\neg\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \underline{y} \oplus \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \dot\neg\, \underline{s} \in \mathrm{P}(\underline{x}) \Rightarrow \\
&\forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{s} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot\neg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{s} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \mathrm{P}(\underline{x}) \oplus \forall \underline{a}\colon \underline{a} \vdash \underline{a} \oplus \\
&\forall \underline{r}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \dot\neg\, \dot\neg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot\neg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \\
&\bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot\neg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \\
&\bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \\
&\underline{r} \vdash \underline{x} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{bs}) \mid \dot\neg\, t_{\mathrm{Ex}} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot\neg \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}}, t_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{r}\} = \\
&b_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \underline{y} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{bs}) \mid \dot\neg\, t_{\mathrm{Ex}} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot\neg \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}}, t_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \\
&\underline{r}\} = b_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \dot\neg\, \underline{x} = \underline{y} \vdash \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{y},\underline{y}\}\} \mid \dot\neg\, c_{\mathrm{Ph}} \in \underline{x} \Rightarrow \dot\neg\, c_{\mathrm{Ph}} \in \underline{y}\} = \emptyset \oplus \\
&\forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \lambda x.\mathrm{Dedu}_0(\lceil \underline{a} \rceil, \lceil \underline{b} \rceil) \Vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \oplus \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \dot\neg\, \underline{s} \in \{\underline{x}, \underline{y}\} \Rightarrow \dot\neg\, \underline{s} = \underline{x} \Rightarrow \underline{s} = \underline{y} \Rightarrow \\
&\dot\neg\, \dot\neg\, \underline{s} = \underline{x} \Rightarrow \underline{s} = \underline{y} \Rightarrow \underline{s} \in \{\underline{x}, \underline{y}\} \oplus \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \oplus \\
&\forall \underline{x}\colon \forall \underline{t}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \langle \lceil \underline{a} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{b} \rceil | \lceil \underline{x} \rceil := \lceil \underline{t} \rceil \rangle_{\mathrm{Ex}} \Vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \oplus \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \dot\neg\, \underline{s} \in \cup \underline{x} \Rightarrow \dot\neg\, \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \\
&\dot\neg\, j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \dot\neg\, \dot\neg\, \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot\neg\, j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \cup \underline{x} \oplus \forall \underline{x}\colon \forall \underline{a}\colon \underline{a} \vdash \forall_{\mathrm{obj}} \underline{x}\colon \underline{a} \oplus \\
&\forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{p}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{z}\colon \underline{p}^{\mathrm{Ph}} \wedge \langle \lceil \underline{b} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{a} \rceil | \lceil \underline{p} \rceil := \lceil \underline{z} \rceil \rangle_{\mathrm{Ph}} \Vdash \dot\neg\, \underline{z} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\} \Rightarrow \dot\neg\, \underline{z} \in \\
&\underline{x} \Rightarrow \dot\neg\, \underline{b} \Rightarrow \dot\neg\, \dot\neg\, \underline{z} \in \underline{x} \Rightarrow \dot\neg\, \underline{b} \Rightarrow \underline{z} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\} \oplus \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \dot\neg\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \dot\neg\, \underline{b} \Rightarrow \dot\neg\, \underline{a} \vdash \\
&\underline{b} \oplus \forall \underline{s}\colon \dot\neg\, \underline{s} \in \emptyset]
\end{aligned}
$$

$[\mathrm{ZFsub} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "ZFsub"]

$[\mathrm{ZFsub} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "system zf"]

MP

[MP $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ Rule tactic]

[MP $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}}$]

[MP $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "MP"]

[MP $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "1rule mp"]

Gen

[Gen $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ Rule tactic]

[Gen $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \forall_{\text{obj}} \underline{\mathsf{x}} \colon \underline{\mathsf{a}}$]

[Gen $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "Gen"]

[Gen $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "1rule gen"]

Repetition

[Repetition $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ Rule tactic]

[Repetition $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}}$]

[Repetition $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "Repetition"]

[Repetition $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "1rule repetition"]

Neg

[Neg $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ Rule tactic]

[Neg $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}}$]

[Neg $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "Neg"]

[Neg $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "1rule ad absurdum"]

Ded

[Ded $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ Rule tactic]

[Ded $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \lambda \mathrm{x}.\mathrm{Dedu}_0(\lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil, \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil) \Vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}}$]

[Ded $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Ded"]

[Ded $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "1rule deduction"]

ExistIntro

[ExistIntro $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ Rule tactic]

[ExistIntro $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{t}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \langle \lceil \underline{a} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{b} \rceil | \lceil \underline{x} \rceil := \lceil \underline{t} \rceil \rangle_{\text{Ex}} \Vdash \underline{a} \vdash \underline{b}$]

[ExistIntro $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "ExistIntro"]

[ExistIntro $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "1rule exist intro"]

Extensionality

[Extensionality $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ Rule tactic]

[Extensionality $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \dot{\neg}\, \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \underline{y}$]

[Extensionality $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Extensionality"]

[Extensionality $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "axiom extensionality"]

Ødef

[Ødef $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ Rule tactic]

[Ødef $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{s}\colon \dot{\neg}\, \underline{s} \in \emptyset$]

[Ødef $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "\O{}def"]

[Ødef $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "axiom empty set"]

PairDef

[PairDef $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ Rule tactic]

[PairDef $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \dot{\neg}\, \underline{s} \in \{\underline{x}, \underline{y}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{s} = \underline{x} \Rightarrow \underline{s} = \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{s} = \underline{x} \Rightarrow \underline{s} = \underline{y} \Rightarrow \underline{s} \in \{\underline{x}, \underline{y}\}$]

[PairDef $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "PairDef"]

[PairDef $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "axiom pair definition"]

UnionDef

[UnionDef $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ Rule tactic]

[UnionDef $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \dot{\neg}\, \underline{s} \in \cup \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg}\, j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg}\, j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \cup \underline{x}$]

[UnionDef $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "UnionDef"]

[UnionDef $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "axiom union definition"]

PowerDef

[PowerDef $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ Rule tactic]

[PowerDef $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \dot{\neg}\, \underline{s} \in \mathrm{P}(\underline{x}) \Rightarrow \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{s} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{s} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \mathrm{P}(\underline{x})$]

[PowerDef $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "PowerDef"]

[PowerDef $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "axiom power definition"]

SeparationDef

[SeparationDef $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ Rule tactic]

[SeparationDef $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{p}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{z}\colon \underline{p}^{\mathrm{Ph}} \wedge \langle \lceil \underline{b} \rceil \equiv^{0} \lceil \underline{a} \rceil \mid \lceil \underline{p} \rceil := \lceil \underline{z} \rceil \rangle_{\mathrm{Ph}} \Vdash \dot{\neg}\, \underline{z} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{z} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{z} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{z} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\}$]

[SeparationDef $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "SeparationDef"]

[SeparationDef $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "axiom separation definition"]

CheatAllDisjoint

[CheatAllDisjoint $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ Rule tactic]

[CheatAllDisjoint $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{x} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{bs}) \mid \dot{\neg}\, t_{\mathrm{Ex}} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, t_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{r}\} = b_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \underline{y} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{bs}) \mid \dot{\neg}\, t_{\mathrm{Ex}} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, t_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{r}\} = b_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \dot{\neg}\, \underline{x} = \underline{y} \vdash \{\mathrm{ph} \in \cup \{\{\underline{x}, \underline{x}\}, \{\underline{y}, \underline{y}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \underline{y}\} = \emptyset$]

[CheatAllDisjoint $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "CheatAllDisjoint"]

[CheatAllDisjoint $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "cheating axiom all disjoint"]

AddDoubleNeg

[AddDoubleNeg $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \vdash \text{RemoveDoubleNeg} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \gg \dot{\neg}\underline{a}; \forall \underline{a}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \vdash \dot{\neg}\underline{a} \gg \dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a}; \underline{a} \vdash \text{Weakening} \rhd \underline{a} \gg \dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \underline{a}; \text{Neg} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a} \gg \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a}\rceil, p_0, c)$]

[AddDoubleNeg $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \underline{a} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a}$]

[AddDoubleNeg $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "AddDoubleNeg"]

[AddDoubleNeg $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "prop lemma add double neg"]

RemoveDoubleNeg

[RemoveDoubleNeg $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \vdash \text{Weakening} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \gg \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a}; \text{AutoImply} \gg \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a}; \text{Neg} \rhd \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a} \rhd \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \gg \underline{a}\rceil, p_0, c)$]

[RemoveDoubleNeg $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \vdash \underline{a}$]

[RemoveDoubleNeg $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "RemoveDoubleNeg"]

[RemoveDoubleNeg $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "prop lemma remove double neg"]

AndCommutativity

[AndCommutativity $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a} \vdash \underline{a} \vdash \text{AddDoubleNeg} \rhd \underline{a} \gg \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a}; \text{MT} \rhd \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{a} \gg \dot{\neg}\underline{b}; \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a} \vdash \underline{a} \vdash \dot{\neg}\underline{b} \gg \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b}; \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b} \vdash \text{Repetition} \gg \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b}; \text{MT} \rhd \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b} \rhd \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b} \gg \dot{\neg}\underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a}; \text{Repetition} \rhd \dot{\neg}\underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a} \gg \dot{\neg}\underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a}\rceil, p_0, c)$]

[AndCommutativity $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b} \vdash \dot{\neg}\underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a}$]

[AndCommutativity $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "AndCommutativity"]

[AndCommutativity $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "prop lemma and commutativity"]

AutoImply

[AutoImply $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \text{Repetition} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}}; \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[AutoImply $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}$]

[AutoImply $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ “AutoImply”]

[AutoImply $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ “prop lemma auto imply”]

Contrapositive

[Contrapositive $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \text{MT} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}}; \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \text{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}}; \text{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[Contrapositive $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}}$]

[Contrapositive $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ “Contrapositive”]

[Contrapositive $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ “prop lemma contrapositive”]

FirstConjunct

[FirstConjunct $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \text{AndCommutativity} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}}; \text{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[FirstConjunct $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}}$]

[FirstConjunct $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ “FirstConjunct”]

[FirstConjunct $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ “prop lemma first conjunct”]

SecondConjunct

[SecondConjunct $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \text{Weakening} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}}; \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}}; \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \text{Repetition} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}}; \text{NegativeMT} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{b}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[SecondConjunct $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}}$]

[SecondConjunct $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ “SecondConjunct”]

[SecondConjunct $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ “prop lemma second conjunct”]

FromContradiction

[FromContradiction $\stackrel{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} \vdash \dot{\neg}\, \underline{a} \vdash \text{Weakening} \rhd \underline{a} \gg \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a}; \text{Weakening} \rhd \dot{\neg}\, \underline{a} \gg \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{a}; \text{Neg} \rhd \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \rhd \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{a} \gg \underline{b}\rceil, \mathrm{p}_0, c)$]

[FromContradiction $\stackrel{\text{stmt}}{\to} \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} \vdash \dot{\neg}\, \underline{a} \vdash \underline{b}$]

[FromContradiction $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ “FromContradiction”]

[FromContradiction $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ “prop lemma from contradiction”]

FromDisjuncts

[FromDisjuncts $\stackrel{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \vdash \underline{a} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \text{Repetition} \rhd \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \gg \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b}; \text{Contrapositive} \rhd \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \gg \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{a}; \text{Technicality} \rhd \underline{a} \Rightarrow \underline{c} \gg \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{c}; \text{ImplyTransitivity} \rhd \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{a} \rhd \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{c} \gg \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{c}; \text{Contrapositive} \rhd \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \gg \dot{\neg}\, \underline{c} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{b}; \text{Contrapositive} \rhd \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \gg \dot{\neg}\, \underline{c} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b}; \text{Neg} \rhd \dot{\neg}\, \underline{c} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b} \rhd \dot{\neg}\, \underline{c} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{b} \gg \underline{c}\rceil, \mathrm{p}_0, c)$]

[FromDisjuncts $\stackrel{\text{stmt}}{\to} \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \vdash \underline{a} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{c}$]

[FromDisjuncts $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ “FromDisjuncts”]

[FromDisjuncts $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ “prop lemma from disjuncts”]

IffCommutativity

[IffCommutativity $\stackrel{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \text{Repetition} \rhd \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \gg \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a}; \text{AndCommutativity} \rhd \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \gg \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b}; \text{Repetition} \rhd \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \gg \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b}\rceil, \mathrm{p}_0, c)$]

[IffCommutativity $\stackrel{\text{stmt}}{\to} \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \dot{\neg}\, \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{a} \Rightarrow \underline{b}$]

[IffCommutativity $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ “IffCommutativity”]

[IffCommutativity $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ “prop lemma iff commutativity”]

IffFirst

[IffFirst $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash$ SecondConjunct $\rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}};$ MP $\rhd \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[IffFirst $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}}$]

[IffFirst $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "IffFirst"]

[IffFirst $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma iff first"]

IffSecond

[IffSecond $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash$ FirstConjunct $\rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}};$ MP $\rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[IffSecond $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}}$]

[IffSecond $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "IffSecond"]

[IffSecond $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma iff second"]

ImplyTransitivity

[ImplyTransitivity $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash$ MP $\rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{b}};$ MP $\rhd \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{c}}; \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash$ Ded $\rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{c}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}};$ MP2 $\rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[ImplyTransitivity $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}}$]

[ImplyTransitivity $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "ImplyTransitivity"]

[ImplyTransitivity $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma imply transitivity"]

JoinConjuncts

[JoinConjuncts $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash$ MP $\rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}}; \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon$ Ded $\rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}}; \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash$ MP $\rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}};$ AddDoubleNeg $\rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}};$ MT $\rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \rhd \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}};$ Repetition $\rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[JoinConjuncts $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}}$]

[JoinConjuncts $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "JoinConjuncts"]

[JoinConjuncts $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma join conjuncts"]

MP2

[MP2 $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \vdash \text{MP} \rhd \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \rhd \underline{a} \gg \underline{b} \Rightarrow \underline{c}; \text{MP} \rhd \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \rhd \underline{b} \gg \underline{c}\rceil, \text{p}_0, c)$]

[MP2 $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \vdash \underline{c}$]

[MP2 $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "MP2"]

[MP2 $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma mp2"]

MP3

[MP3 $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{d}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \vdash \underline{c} \vdash \text{MP2} \rhd \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \rhd \underline{a} \rhd \underline{b} \gg \underline{c} \Rightarrow \underline{d}; \text{MP} \rhd \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \rhd \underline{c} \gg \underline{d}\rceil, \text{p}_0, c)$]

[MP3 $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{d}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \vdash \underline{c} \vdash \underline{d}$]

[MP3 $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "MP3"]

[MP3 $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma mp3"]

MP4

[MP4 $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{d}\colon \forall \underline{e}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \Rightarrow \underline{e} \vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \vdash \underline{c} \vdash \underline{d} \vdash \text{MP2} \rhd \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \Rightarrow \underline{e} \rhd \underline{a} \rhd \underline{b} \gg \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \Rightarrow \underline{e}; \text{MP2} \rhd \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \Rightarrow \underline{e} \rhd \underline{c} \rhd \underline{d} \gg \underline{e}\rceil, \text{p}_0, c)$]

[MP4 $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{d}\colon \forall \underline{e}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \Rightarrow \underline{e} \vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \vdash \underline{c} \vdash \underline{d} \vdash \underline{e}$]

[MP4 $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "MP4"]

[MP4 $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma mp4"]

MP5

[MP5 $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{d}\colon \forall \underline{e}\colon \forall \underline{f}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \Rightarrow \underline{e} \Rightarrow \underline{f} \vdash \underline{a} \vdash \underline{b} \vdash \underline{c} \vdash \underline{d} \vdash \underline{e} \vdash \text{MP3} \rhd \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{d} \Rightarrow \underline{e} \Rightarrow \underline{f} \rhd \underline{a} \rhd \underline{b} \rhd \underline{c} \gg \underline{d} \Rightarrow \underline{e} \Rightarrow \underline{f}; \text{MP2} \rhd \underline{d} \Rightarrow \underline{e} \Rightarrow \underline{f} \rhd \underline{d} \rhd \underline{e} \gg \underline{f}\rceil, \text{p}_0, c)$]

$[\mathrm{MP5} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \forall \underline{\mathsf{d}}\colon \forall \underline{\mathsf{e}}\colon \forall \underline{\mathsf{f}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{d}} \Rightarrow \underline{\mathsf{e}} \Rightarrow \underline{\mathsf{f}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{d}} \vdash \underline{\mathsf{e}} \vdash \underline{\mathsf{f}}]$

$[\mathrm{MP5} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "MP5"$]$

$[\mathrm{MP5} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma mp5"$]$

MT

$[\mathrm{MT} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{Technicality} \gg \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{NegativeMT} \rhd \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{MT} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{MT} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "MT"$]$

$[\mathrm{MT} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma mt"$]$

NegativeMT

$[\mathrm{NegativeMT} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{Weakening} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Neg} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{NegativeMT} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{NegativeMT} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "NegativeMT"$]$

$[\mathrm{NegativeMT} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma negative mt"$]$

Technicality

$[\mathrm{Technicality} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \vdash \mathrm{RemoveDoubleNeg} \rhd \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{b}}; \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{Technicality} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg}\, \dot{\neg}\, \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Technicality} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "Technicality"$]$

$[\mathrm{Technicality} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma technicality"$]$

Weakening

[Weakening $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \text{Repetition} \rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{b}}; \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \underline{\mathsf{b}} \vdash \text{MP} \rhd \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[Weakening $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}$]

[Weakening $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Weakening"]

[Weakening $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma weakening"]

WeakenOr1

[WeakenOr1 $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{b}} \vdash \text{Weakening} \rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \text{Repetition} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[WeakenOr1 $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{b}} \vdash \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}$]

[WeakenOr1 $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "WeakenOr1"]

[WeakenOr1 $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma weaken or first"]

WeakenOr2

[WeakenOr2 $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \vdash \text{FromContradiction} \rhd \underline{\mathsf{a}} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{b}}; \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \underline{\mathsf{a}} \vdash \text{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \text{Repetition} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[WeakenOr2 $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \dot{\neg} \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}$]

[WeakenOr2 $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "WeakenOr2"]

[WeakenOr2 $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "prop lemma weaken or second"]

Formula2Pair

[Formula2Pair $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \vdash \text{PairDef} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} \in \{\underline{\mathsf{x}}, \underline{\mathsf{y}}\} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \{\underline{\mathsf{x}}, \underline{\mathsf{y}}\}; \text{IffFirst} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} \in \{\underline{\mathsf{x}}, \underline{\mathsf{y}}\} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \{\underline{\mathsf{x}}, \underline{\mathsf{y}}\} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \gg \underline{\mathsf{s}} \in \{\underline{\mathsf{x}}, \underline{\mathsf{y}}\} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[Formula2Pair $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \{\underline{\mathsf{x}}, \underline{\mathsf{y}}\}$]

[Formula2Pair $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Formula2Pair"]

[Formula2Pair $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma formula2pair"]

Pair2Formula

[Pair2Formula $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \underline{s} \in \{\underline{x},\underline{y}\} \vdash \mathrm{PairDef} \gg \dot{\neg}\underline{s} \in \{\underline{x},\underline{y}\} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}\in\{\underline{x},\underline{y}\}; \mathrm{IffSecond} \rhd \dot{\neg}\underline{s}\in\{\underline{x},\underline{y}\} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{s}=\underline{x}\Rightarrow \underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}\in\{\underline{x},\underline{y}\} \rhd \underline{s}\in\{\underline{x},\underline{y}\} \gg \dot{\neg}\underline{s}=\underline{x}\Rightarrow\underline{s}=\underline{y}\rceil, p_0, c)$]

[Pair2Formula $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \underline{s} \in \{\underline{x},\underline{y}\} \vdash \dot{\neg}\underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \underline{s}=\underline{y}$]

[Pair2Formula $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Pair2Formula"]

[Pair2Formula $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma pair2formula"]

Formula2Union

[Formula2Union $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \vdash j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \vdash \mathrm{JoinConjuncts} \rhd \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \rhd j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \gg \dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x}; \mathrm{UnionDef} \gg \dot{\neg}\underline{s} \in \cup\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \cup\underline{x}; \mathrm{IffFirst} \rhd \dot{\neg}\underline{s} \in \cup\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \cup\underline{x} \rhd \dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in \cup\underline{x}\rceil, p_0, c)$]

[Formula2Union $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \vdash j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \vdash \underline{s} \in \cup\underline{x}$]

[Formula2Union $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Formula2Union"]

[Formula2Union $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma formula2union"]

Union2Formula

[Union2Formula $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \underline{s} \in \cup\underline{x} \vdash \mathrm{UnionDef} \gg \dot{\neg}\underline{s} \in \cup\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \cup\underline{x}; \mathrm{IffSecond} \rhd \dot{\neg}\underline{s} \in \cup\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \cup\underline{x} \rhd \underline{s} \in \cup\underline{x} \gg \dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x}\rceil, p_0, c)$]

[Union2Formula $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \underline{s} \in \cup\underline{x} \vdash \dot{\neg}\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg} j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x}$]

[Union2Formula $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Union2Formula"]

[Union2Formula $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma union2formula"]

Formula2Sep

[Formula2Sep $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{p}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \underline{\mathsf{p}}^{\text{Ph}} \wedge \langle \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil | \lceil \underline{\mathsf{p}} \rceil := \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \rangle_{\text{Ph}} \Vdash \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \text{JoinConjuncts} \rhd \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}}; \text{SeparationDef} \mathrel{\rhd\!\!\rhd} \underline{\mathsf{p}}^{\text{Ph}} \wedge \langle \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil | \lceil \underline{\mathsf{p}} \rceil := \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \rangle_{\text{Ph}} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg} \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\}; \text{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg} \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\}; \text{MP} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[Formula2Sep $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{p}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \underline{\mathsf{p}}^{\text{Ph}} \wedge \langle \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil | \lceil \underline{\mathsf{p}} \rceil := \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \rangle_{\text{Ph}} \Vdash \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\}$]

[Formula2Sep $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Formula2Sep"]

[Formula2Sep $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma formula2separation"]

Sep2Formula

[Sep2Formula $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{p}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \underline{\mathsf{p}}^{\text{Ph}} \wedge \langle \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil | \lceil \underline{\mathsf{p}} \rceil := \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \rangle_{\text{Ph}} \Vdash \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \vdash \text{SeparationDef} \mathrel{\rhd\!\!\rhd} \underline{\mathsf{p}}^{\text{Ph}} \wedge \langle \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil | \lceil \underline{\mathsf{p}} \rceil := \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \rangle_{\text{Ph}} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg} \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\}; \text{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \dot{\neg} \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \gg \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}}; \text{MP} \rhd \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[Sep2Formula $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{p}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \underline{\mathsf{p}}^{\text{Ph}} \wedge \langle \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil | \lceil \underline{\mathsf{p}} \rceil := \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \rangle_{\text{Ph}} \Vdash \underline{\mathsf{y}} \in \{\text{ph} \in \underline{\mathsf{x}} \mid \underline{\mathsf{a}}\} \vdash \dot{\neg} \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{\mathsf{b}}$]

[Sep2Formula $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Sep2Formula"]

[Sep2Formula $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma separation2formula"]

SubsetInPower

[SubsetInPower $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \vdash \text{Gen} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \gg \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}; \text{PowerDef} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \Rightarrow \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}); \text{IffFirst} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \Rightarrow \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \rhd \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \gg \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[SubsetInPower $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}})$]

[SubsetInPower $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "SubsetInPower"]

[SubsetInPower $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma subset in power set"]

HelperPowerIsSub

[HelperPowerIsSub $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \vdash \text{Repetition} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \gg \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}}; \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \vdash \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \gg \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \Vdash \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[HelperPowerIsSub $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \Vdash \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}}$]

[HelperPowerIsSub $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "HelperPowerIsSub"]

[HelperPowerIsSub $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma power set is subset0"]

PowerIsSub

[PowerIsSub $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{s}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \vdash \text{PowerDef} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \Rightarrow \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}); \text{IffSecond} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \Rightarrow \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \gg \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}; \text{HelperPowerIsSub} \unrhd \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{s}} \rceil \unrhd \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \gg \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}; \text{MP} \rhd \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \rhd \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \gg \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}; \text{Repetition} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \gg \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[PowerIsSub $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{s}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \underline{\mathsf{s}} \in \text{P}(\underline{\mathsf{x}}) \vdash \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}$]

[PowerIsSub $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "PowerIsSub"]

[PowerIsSub $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma power set is subset"]

(Switch)HelperPowerIsSub

[(Switch)HelperPowerIsSub $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \text{HelperPowerIsSub} \unrhd \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \unrhd \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \gg \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \rceil, \text{p}_0, \mathsf{c})$]

[(Switch)HelperPowerIsSub $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \forall_{\text{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}}$]

[(Switch)HelperPowerIsSub $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "(Switch)HelperPowerIsSub"]

[(Switch)HelperPowerIsSub $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma power set is subset0-switch"]

(Switch)PowerIsSub

$[\mathrm{(Switch)PowerIsSub} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}} \colon \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{s}} \rceil \Vdash \underline{\mathsf{s}} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{x}}) \vdash \mathrm{PowerIsSub} \mathrel{\triangleright\!\!\triangleright} \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{s}} \rceil \mathrel{\triangleright\!\!\triangleright} \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{x}}) \gg \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{(Switch)PowerIsSub} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{s}} \colon \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{s}} \rceil \Vdash \underline{\mathsf{s}} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{x}}) \vdash \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{s}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}]$

$[\mathrm{(Switch)PowerIsSub} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "(Switch)PowerIsSub"$]$

$[\mathrm{(Switch)PowerIsSub} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma power set is subset-switch"$]$

ToSetEquality

$[\mathrm{ToSetEquality} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{y}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \vdash \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \vdash \mathrm{JoinConjuncts} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \gg \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}; \mathrm{Gen} \rhd \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \gg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}; \mathrm{Extensionality} \gg \dot{\neg} \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}}; \mathrm{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg} \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \gg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}}; \mathrm{MP} \rhd \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \rhd \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \gg \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{ToSetEquality} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{y}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \vdash \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}}]$

$[\mathrm{ToSetEquality} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "ToSetEquality"$]$

$[\mathrm{ToSetEquality} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma set equality suff condition"$]$

HelperToSetEquality(t)

$[\mathrm{HelperToSetEquality(t)} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{y}} \colon \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{y}} \vdash \mathrm{Repetition} \rhd \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{y}} \gg \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{y}}; \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{y}} \colon \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{y}} \colon \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{y}} \vdash \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{y}} \gg \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{HelperToSetEquality(t)} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{y}} \colon \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^{0} \lceil \underline{\mathsf{y}} \rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}}]$

$[\mathrm{HelperToSetEquality(t)} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "HelperToSetEquality(t)"$]$

$[\mathrm{HelperToSetEquality(t)} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma set equality suff condition(t)0"$]$

ToSetEquality(t)

[ToSetEquality(t) $\overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil\bar{t}\rceil \#^0 \lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \bar{t}\in\underline{x} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{y} \vdash \bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{x} \vdash \mathrm{Gen} \rhd \bar{t}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{y} \gg \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{t}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{y}; \mathrm{HelperToSetEquality}(t) \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \gg \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{t}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}; \mathrm{MP}\rhd \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{t}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\rhd\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{t}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{y}\gg\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}; \mathrm{Gen}\rhd\bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{x}\gg\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{x}; \mathrm{HelperToSetEquality}(t)\unrhd\lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil\unrhd\lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil\gg\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}; \mathrm{MP}\rhd\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\rhd\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{x}\gg\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}; \mathrm{ToSetEquality}\rhd\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\rhd\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\gg\underline{x}=\underline{y}\rceil, p_0, c)$]

[ToSetEquality(t) $\overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil\bar{t}\rceil \#^0 \lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \bar{t}\in\underline{x} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{y} \vdash \bar{t}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{x} \vdash \underline{x}=\underline{y}$]

[ToSetEquality(t) $\overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "ToSetEquality(t)"]

[ToSetEquality(t) $\overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma set equality suff condition(t)"]

HelperFromSetEquality

[HelperFromSetEquality $\overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x} \vdash \mathrm{Repetition}\rhd\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\gg\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}; \forall\underline{s}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon \mathrm{Ded}\rhd\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\vdash\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\gg\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil\Vdash\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil\Vdash\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{s}\in\underline{x}\Rightarrow\underline{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{s}\in\underline{y}\Rightarrow\underline{s}\in\underline{x}\rceil, p_0, c)$]

[HelperFromSetEquality $\overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub}\vdash\forall\underline{s}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil\Vdash\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil\Vdash\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{s}\in\underline{x}\Rightarrow\underline{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{s}\in\underline{y}\Rightarrow\underline{s}\in\underline{x}$]

[HelperFromSetEquality $\overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "HelperFromSetEquality"]

[HelperFromSetEquality $\overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma set equality skip quantifier"]

FromSetEquality

[FromSetEquality $\overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub}\vdash\forall\underline{s}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil\Vdash\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil\Vdash\underline{x}=\underline{y}\vdash\underline{s}\in\underline{x}\vdash\mathrm{Extensionality}\gg\dot{\neg}\underline{x}=\underline{y}\Rightarrow\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\underline{x}=\underline{y}; \mathrm{IffSecond}\rhd\dot{\neg}\underline{x}=\underline{y}\Rightarrow\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\underline{x}=\underline{y}\rhd\underline{x}=\underline{y}\gg\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}; \mathrm{HelperFromSetEquality}\unrhd\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil\unrhd\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil\gg\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{s}\in\underline{x}\Rightarrow\underline{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{s}\in\underline{y}\Rightarrow\underline{s}\in\underline{x}; \mathrm{MP}\rhd\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{y}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{s}\in\underline{x}\Rightarrow\underline{s}\in\underline{y}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{s}\in\underline{y}\Rightarrow\underline{s}\in\underline{x}\rhd\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\dot{\neg}\bar{s}\in\underline{x}\Rightarrow\bar{s}\in$

$\underline{y} \Rightarrow \dot{\neg} \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \gg \dot{\neg} \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{s} \in \underline{y} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{x}; \text{IffSecond} \rhd \dot{\neg} \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{s} \in \underline{y} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{x} \rhd \underline{s} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in \underline{y} \rceil, p_0, c)]$

[FromSetEquality $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash \underline{s} \in \underline{y}$]

[FromSetEquality $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "FromSetEquality"]

[FromSetEquality $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma set equality nec condition"]

HelperReflexivity

[HelperReflexivity $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{bs}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \vdash \text{Repetition} \rhd \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \gg \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r}; \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{bs}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{r}\colon \forall \underline{bs}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \vdash \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \gg \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{s}\}\} \in \underline{r} \rceil, p_0, c)$]

[HelperReflexivity $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{s}\}\} \in \underline{r}$]

[HelperReflexivity $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "HelperReflexivity"]

[HelperReflexivity $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma reflexivity0"]

Reflexivity

[Reflexivity $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{s} \in \underline{bs} \vdash \text{HelperReflexivity} \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \gg \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{s}\}\} \in \underline{r}; \text{MP2} \rhd \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{s}\}\} \in \underline{r} \rhd \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \rhd \underline{s} \in \underline{bs} \gg \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{s}\}\} \in \underline{r} \rceil, p_0, c)$]

[Reflexivity $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{s} \in \underline{bs} \vdash \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{s}\}\} \in \underline{r}$]

[Reflexivity $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Reflexivity"]

[Reflexivity $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma reflexivity"]

HelperSymmetry

[HelperSymmetry $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{bs}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \vdash \text{Repetition} \rhd \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow$

$\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}; \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{t}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{HelperSymmetry} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{t}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}]$

$[\mathrm{HelperSymmetry} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "HelperSymmetry"$]$

$[\mathrm{HelperSymmetry} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma symmetry0"$]$

Symmetry

$[\mathrm{Symmetry} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{t}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \mathrm{HelperSymmetry} \unrhd \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \unrhd \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \unrhd \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \unrhd \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \gg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}; \mathrm{MP4} \rhd \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rhd \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \rhd \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \rhd \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{Symmetry} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{t}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}]$

$[\mathrm{Symmetry} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "Symmetry"$]$

$[\mathrm{Symmetry} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma symmetry"$]$

HelperTransitivity

$[\mathrm{HelperTransitivity} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \mathrm{Repetition} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}; \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{s}}\colon \forall \underline{\mathsf{t}}\colon \forall \underline{\mathsf{u}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow$

$\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

[HelperTransitivity $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ ZFsub $\vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon \forall\underline{\mathsf{s}}\colon \forall\underline{\mathsf{t}}\colon \forall\underline{\mathsf{u}}\colon \forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}$]

[HelperTransitivity $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "HelperTransitivity"]

[HelperTransitivity $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "lemma transitivity0"]

Transitivity

[Transitivity $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon \forall\underline{\mathsf{s}}\colon \forall\underline{\mathsf{t}}\colon \forall\underline{\mathsf{u}}\colon \forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \mathrm{HelperTransitivity} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \gg \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}; \mathrm{MP5} \rhd \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rhd \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \rhd \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \rhd \underline{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \rhd \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}; \mathrm{MP} \rhd \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rhd \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[Transitivity $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ ZFsub $\vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon \forall\underline{\mathsf{s}}\colon \forall\underline{\mathsf{t}}\colon \forall\underline{\mathsf{u}}\colon \forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{t}}\},\{\underline{\mathsf{t}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}$]

[Transitivity $\stackrel{\text{tex}}{\to}$ "Transitivity"]

[Transitivity $\stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "lemma transitivity"]

ERisReflexive

[ERisReflexive $\overset{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\vdash \mathrm{Repetition}\rhd\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\gg\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r};\mathrm{FirstConjunct}\rhd\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\gg\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r};\mathrm{FirstConjunct}\rhd\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\gg\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\rceil, p_0, c)$]

[ERisReflexive $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{ZFsub}\vdash\forall\underline{r}\colon\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\vdash\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}$]

[ERisReflexive $\overset{\text{tex}}{\to}$ "ERisReflexive"]

[ERisReflexive $\overset{\text{pyk}}{\to}$ "lemma er is reflexive"]

ERisSymmetric

[ERisSymmetric $\overset{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\vdash \mathrm{Repetition}\rhd\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\gg\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r};\mathrm{FirstConjunct}\rhd\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\gg\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon\bar{s}\in$

$\underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}; \mathrm{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{ERisSymmetric} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{r}} \colon \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}]$

$[\mathrm{ERisSymmetric} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "ERisSymmetric"$]$

$[\mathrm{ERisSymmetric} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma er is symmetric"$]$

ERisTransitive

$[\mathrm{ERisTransitive} \stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{r}} \colon \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \mathrm{Repetition} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}; \mathrm{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{ERisTransitive} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{r}} \colon \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}]$

$[\mathrm{ERisTransitive} \stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "ERisTransitive"$]$

$[\mathrm{ERisTransitive} \stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma er is transitive"$]$

∅isSubset

[∅isSubset $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \underline{s} \in \emptyset \vdash \emptyset\text{def} \gg \dot{\neg}\, \underline{s} \in \emptyset; \text{FromContradiction} \rhd \underline{s} \in \emptyset \rhd \dot{\neg}\, \underline{s} \in \emptyset \gg \underline{s} \in \underline{x}; \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \underline{s} \in \emptyset \vdash \underline{s} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in \emptyset \Rightarrow \underline{s} \in \underline{x}\rceil, p_0, c)$]

[∅isSubset $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \underline{s} \in \emptyset \Rightarrow \underline{s} \in \underline{x}$]

[∅isSubset $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "\O{}isSubset"]

[∅isSubset $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma empty set is subset"]

HelperMemberNot∅

[HelperMemberNot∅ $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash \underline{x} = \emptyset \vdash \text{FromSetEquality} \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \rhd \underline{x} = \emptyset \rhd \underline{s} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in \emptyset; \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash \underline{x} = \emptyset \vdash \underline{s} \in \emptyset \gg \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \emptyset \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset\rceil, p_0, c)$]

[HelperMemberNot∅ $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \emptyset \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset$]

[HelperMemberNot∅ $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "HelperMemberNot\O{}"]

[HelperMemberNot∅ $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma member not empty0"]

MemberNot∅

[MemberNot∅ $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash \text{HelperMemberNot}\emptyset \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \gg \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \emptyset \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset; \text{MP} \rhd \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \emptyset \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset \rhd \underline{s} \in \underline{x} \gg \underline{x} = \emptyset \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset; \emptyset\text{def} \gg \dot{\neg}\, \underline{s} \in \emptyset; \text{MT} \rhd \underline{x} = \emptyset \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset \rhd \dot{\neg}\, \underline{s} \in \emptyset \gg \dot{\neg}\, \underline{x} = \emptyset\rceil, p_0, c)$]

[MemberNot∅ $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash \dot{\neg}\, \underline{x} = \emptyset$]

[MemberNot∅ $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "MemberNot\O{}"]

[MemberNot∅ $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma member not empty"]

HelperUnique∅

[HelperUnique∅ $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{x} \vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash \text{FromContradiction} \rhd \underline{s} \in \underline{x} \rhd \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in \emptyset; \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{x} \vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash \underline{s} \in \emptyset \gg \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset; \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{x} \vdash \text{MP} \rhd \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset \rhd \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset\rceil, p_0, c)$]

[HelperUnique∅ $\stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{x} \vdash \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \emptyset$]

[HelperUnique∅ $\stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "HelperUnique\O{}"]

[HelperUnique∅ $\stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma unique empty set0"]

Unique∅

[Unique∅ $\stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \vdash \mathrm{HelperUnique}\emptyset \rhd \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \gg \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \emptyset; \emptyset\mathrm{isSubset} \gg \bar{s} \in \emptyset \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x}; \mathrm{ToSetEquality} \rhd \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \emptyset \rhd \bar{s} \in \emptyset \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \gg \underline{x} = \emptyset \rceil, p_0, c)$]

[Unique∅ $\stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \vdash \underline{x} = \emptyset$]

[Unique∅ $\stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "Unique\O{}"]

[Unique∅ $\stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma unique empty set"]

=Reflexivity

[=Reflexivity $\stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \mathrm{AutoImply} \gg \bar{s} \in \underline{s} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{s}; \mathrm{ToSetEquality} \rhd \bar{s} \in \underline{s} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{s} \rhd \bar{s} \in \underline{s} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{s} \gg \underline{s} = \underline{s} \rceil, p_0, c)$]

[=Reflexivity $\stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \underline{s} = \underline{s}$]

[=Reflexivity $\stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "=\!{}Reflexivity"]

[=Reflexivity $\stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma =reflexivity"]

=Symmetry

[=Symmetry $\stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \mathrm{Extensionality} \gg \dot{\neg}\, \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \underline{y}; \mathrm{IffSecond} \rhd \dot{\neg}\, \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \underline{y} \rhd \underline{x} = \underline{y} \gg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x}; \mathrm{HelperFromSetEquality} \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \gg \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x}; \mathrm{MP} \rhd \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \rhd \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \gg \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x}; \mathrm{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \gg \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y}; \mathrm{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \gg \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x}; \mathrm{ToSetEquality} \rhd \bar{s} \in \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \rhd \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{y} \gg \underline{y} = \underline{x} \rceil, p_0, c)$]

[=Symmetry $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \underline{y} = \underline{x}$]

[=Symmetry $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "=\!{}Symmetry"]

[=Symmetry $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma =symmetry"]

Helper = Transitivity

[Helper = Transitivity $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil$ZFsub $\vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{z}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \underline{y} = \underline{z} \vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash$ FromSetEquality $\unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \rhd \underline{x} = \underline{y} \rhd \underline{s} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in \underline{y};$ FromSetEquality $\unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \rhd \underline{y} = \underline{z} \rhd \underline{s} \in \underline{y} \gg \underline{s} \in \underline{z}; \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{z}\colon$ Ded $\rhd \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{z}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \underline{y} = \underline{z} \vdash \underline{s} \in \underline{x} \vdash \underline{s} \in \underline{z} \gg \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \underline{y} = \underline{z} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{z} \rceil, p_0, c)$]

[Helper = Transitivity $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{z}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \underline{y} = \underline{z} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{z}$]

[Helper = Transitivity $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Helper\!{}=\!{}Transitivity"]

[Helper = Transitivity $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma =transitivity0"]

= Transitivity

[=Transitivity $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil$ZFsub $\vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{z}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \underline{y} = \underline{z} \vdash$ Helper = Transitivity $\unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \gg \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \underline{y} = \underline{z} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{z};$ MP2 $\rhd \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \underline{y} = \underline{z} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{z} \rhd \underline{x} = \underline{y} \rhd \underline{y} = \underline{z} \gg \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{z};$ =Symmetry $\unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \rhd \underline{x} = \underline{y} \gg \underline{y} = \underline{x};$ =Symmetry $\unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \rhd \underline{y} = \underline{z} \gg \underline{z} = \underline{y};$ Helper = Transitivity $\unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \gg \underline{z} = \underline{y} \Rightarrow \underline{y} = \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{z} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x};$ MP2 $\rhd \underline{z} = \underline{y} \Rightarrow \underline{y} = \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{z} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \rhd \underline{z} = \underline{y} \rhd \underline{y} = \underline{x} \gg \bar{s} \in \underline{z} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x};$ ToSetEquality $\rhd \bar{s} \in \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{z} \rhd \bar{s} \in \underline{z} \Rightarrow \bar{s} \in \underline{x} \gg \underline{x} = \underline{z} \rceil, p_0, c)$]

[=Transitivity $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{z}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{z} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \underline{y} = \underline{z} \vdash \underline{x} = \underline{z}$]

[=Transitivity $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "\!{}=\!{}Transitivity"]

[=Transitivity $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma =transitivity"]

HelperTransferNotEq

[HelperTransferNotEq $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{v}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \vdash \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \vdash \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \vdash = \mathrm{Transitivity} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \rhd \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \rhd \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \gg \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{w}}; = \mathrm{Symmetry} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \rhd \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \gg \underline{\mathsf{w}} = \underline{\mathsf{y}}; = \mathrm{Transitivity} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \rhd \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{w}} \rhd \underline{\mathsf{w}} = \underline{\mathsf{y}} \gg \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}}; \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{v}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{v}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \vdash \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \vdash \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \gg \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[HelperTransferNotEq $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{v}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}}$]

[HelperTransferNotEq $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "HelperTransferNotEq"]

[HelperTransferNotEq $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma transfer ~is0"]

TransferNotEq

[TransferNotEq $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{v}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \vdash \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \vdash \mathrm{HelperTransferNotEq} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \gg \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}}; \mathrm{MP2} \rhd \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \rhd \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \rhd \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \gg \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}}; \mathrm{MT} \rhd \underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \rhd \dot{\neg}\underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \gg \dot{\neg}\underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[TransferNotEq $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{v}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{v}} \vdash \underline{\mathsf{y}} = \underline{\mathsf{w}} \vdash \dot{\neg}\underline{\mathsf{v}} = \underline{\mathsf{w}}$]

[TransferNotEq $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "TransferNotEq"]

[TransferNotEq $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma transfer ~is"]

HelperPairSubset

[HelperPairSubset $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{s}}\colon \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{s}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \vdash \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \vdash = \mathrm{Transitivity} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{s}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \rhd \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \rhd \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \gg \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}}; \mathrm{WeakenOr2} \rhd \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \gg \dot{\neg}\underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{w}}; \forall\underline{\mathsf{s}}\colon \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{\mathsf{s}}\colon \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{s}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \vdash \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \vdash \dot{\neg}\underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{w}} \gg \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{s}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} = \underline{\mathsf{w}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[HelperPairSubset $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{s}}\colon \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{s}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash$

$\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}]$

[HelperPairSubset $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "HelperPairSubset"]

[HelperPairSubset $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma pair subset0"]

Helper(2)PairSubset

[Helper(2)PairSubset $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall\underline{s}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{v}\colon\forall\underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \underline{v}=\underline{w} \vdash \underline{s}=\underline{v} \vdash {=}\text{Transitivity} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \rhd \underline{s}=\underline{v} \rhd \underline{v}=\underline{w} \gg \underline{s}=\underline{w}; \text{WeakenOr1} \rhd \underline{s}=\underline{w} \gg \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}; \forall\underline{s}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{v}\colon\forall\underline{w}\colon \text{Ded} \rhd \forall\underline{s}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{v}\colon\forall\underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \underline{v}=\underline{w} \vdash \underline{s}=\underline{v} \vdash \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w} \gg \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \underline{v}=\underline{w} \Rightarrow \underline{s}=\underline{v} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}\rceil, p_0, c)]$

[Helper(2)PairSubset $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall\underline{s}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{v}\colon\forall\underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \underline{v}=\underline{w} \Rightarrow \underline{s}=\underline{v} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}]$

[Helper(2)PairSubset $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "Helper(2)PairSubset"]

[Helper(2)PairSubset $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma pair subset1"]

PairSubset

[PairSubset $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall\underline{s}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{v}\colon\forall\underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \underline{v}=\underline{w} \vdash \underline{s} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \vdash \text{Pair2Formula} \rhd \underline{s} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \gg \dot{\neg}\underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \underline{s}=\underline{v}; \text{HelperPairSubset} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \gg \underline{x}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}; \text{MP} \rhd \underline{x}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w} \rhd \underline{x}=\underline{y} \gg \underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}; \text{Helper(2)PairSubset} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \gg \underline{v}=\underline{w} \Rightarrow \underline{s}=\underline{v} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}; \text{MP} \rhd \underline{v}=\underline{w} \Rightarrow \underline{s}=\underline{v} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w} \rhd \underline{v}=\underline{w} \gg \underline{s}=\underline{v} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}; \text{FromDisjuncts} \rhd \dot{\neg}\underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \underline{s}=\underline{v} \rhd \underline{s}=\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w} \rhd \underline{s}=\underline{v} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w} \gg \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w}; \text{Formula2Pair} \rhd \dot{\neg}\underline{s}=\underline{y} \Rightarrow \underline{s}=\underline{w} \gg \underline{s} \in \{\underline{y},\underline{w}\}; \forall\underline{s}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{v}\colon\forall\underline{w}\colon \text{Ded} \rhd \forall\underline{s}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{v}\colon\forall\underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \underline{v}=\underline{w} \vdash \underline{s} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \vdash \underline{s} \in \{\underline{y},\underline{w}\} \gg \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \Rightarrow \underline{v}=\underline{w} \Rightarrow \underline{s} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\underline{y},\underline{w}\}\rceil, p_0, c)]$

[PairSubset $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall\underline{s}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{v}\colon\forall\underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \Rightarrow \underline{v}=\underline{w} \Rightarrow \underline{s} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\underline{y},\underline{w}\}]$

[PairSubset $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "PairSubset"]

[PairSubset $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma pair subset"]

SamePair

[SamePair $\stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{v}\colon \forall \underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{v}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{w}\}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \underline{v}=\underline{w} \vdash \mathrm{PairSubset} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \gg \underline{x}=\underline{y} \Rightarrow \underline{v}=\underline{w} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{y},\underline{w}\}; \mathrm{MP2} \rhd \underline{x}=\underline{y} \Rightarrow \underline{v}=\underline{w} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{y},\underline{w}\} \rhd \underline{x}=\underline{y} \rhd \underline{v}=\underline{w} \gg \bar{t} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{y},\underline{w}\}; {=}\mathrm{Symmetry} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \rhd \underline{x}=\underline{y} \gg \underline{y}=\underline{x}; {=}\mathrm{Symmetry} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \rhd \underline{v}=\underline{w} \gg \underline{w}=\underline{v}; \mathrm{PairSubset} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \gg \underline{y}=\underline{x} \Rightarrow \underline{w}=\underline{v} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{y},\underline{w}\} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{x},\underline{v}\}; \mathrm{MP2} \rhd \underline{y}=\underline{x} \Rightarrow \underline{w}=\underline{v} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{y},\underline{w}\} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \rhd \underline{y}=\underline{x} \rhd \underline{w}=\underline{v} \gg \bar{t} \in \{\underline{y},\underline{w}\} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{x},\underline{v}\}; \mathrm{ToSetEquality}(t) \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{v}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{w}\}\rceil \rhd \bar{t} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{y},\underline{w}\} \rhd \bar{t} \in \{\underline{y},\underline{w}\} \Rightarrow \bar{t} \in \{\underline{x},\underline{v}\} \gg \{\underline{x},\underline{v}\}=\{\underline{y},\underline{w}\}\rceil, p_0, c)$]

[SamePair $\stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{v}\colon \forall \underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{v}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{w}\}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \underline{v}=\underline{w} \vdash \{\underline{x},\underline{v}\}=\{\underline{y},\underline{w}\}$]

[SamePair $\stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ “SamePair”]

[SamePair $\stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ “lemma same pair”]

SameSingleton

[SameSingleton $\stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \mathrm{SamePair} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \rhd \underline{x}=\underline{y} \rhd \underline{x}=\underline{y} \gg \{\underline{x},\underline{x}\}=\{\underline{y},\underline{y}\}; \mathrm{Repetition} \rhd \{\underline{x},\underline{x}\}=\{\underline{y},\underline{y}\} \gg \{\underline{x},\underline{x}\}=\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil, p_0, c)$]

[SameSingleton $\stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \{\underline{x},\underline{x}\}=\{\underline{y},\underline{y}\}$]

[SameSingleton $\stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ “SameSingleton”]

[SameSingleton $\stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ “lemma same singleton”]

UnionSubset

[UnionSubset $\stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \underline{s} \in \cup\underline{x} \vdash \mathrm{Union2Formula} \rhd \underline{s} \in \cup\underline{x} \gg \dot{\neg}\,\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg}\, j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x}; \mathrm{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg}\,\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg}\, j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}}; \mathrm{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg}\,\underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg}\, j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \gg j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x}; \mathrm{FromSetEquality} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \rhd \underline{x}=\underline{y} \rhd j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{x} \gg j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{y}; \mathrm{Formula2Union} \rhd \underline{s} \in j_{\mathrm{Ex}} \rhd j_{\mathrm{Ex}} \in \underline{y} \gg \underline{s} \in \cup\underline{y}; \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \underline{s} \in \cup\underline{x} \vdash \underline{s} \in$

$\cup \underline{y} \gg \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \underline{s} \in \cup \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \cup \underline{y} \rceil, p_0, c)]$

[UnionSubset $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \underline{s} \in \cup \underline{x} \Rightarrow \underline{s} \in \cup \underline{y}$]

[UnionSubset $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "UnionSubset"]

[UnionSubset $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma union subset"]

SameUnion

[SameUnion $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \text{UnionSubset} \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \gg \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{y}; \text{MP} \rhd \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{y} \rhd \underline{x} = \underline{y} \gg \bar{s} \in \cup \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{y}; {=}\text{Symmetry} \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \rhd \underline{x} = \underline{y} \gg \underline{y} = \underline{x}; \text{UnionSubset} \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \gg \underline{y} = \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{x}; \text{MP} \rhd \underline{y} = \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{x} \rhd \underline{y} = \underline{x} \gg \bar{s} \in \cup \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{x}; \text{ToSetEquality} \rhd \bar{s} \in \cup \underline{x} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{y} \rhd \bar{s} \in \cup \underline{y} \Rightarrow \bar{s} \in \cup \underline{x} \gg \cup \underline{x} = \cup \underline{y} \rceil, p_0, c)$]

[SameUnion $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \cup \underline{x} = \cup \underline{y}$]

[SameUnion $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "SameUnion"]

[SameUnion $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma same union"]

SeparationSubset

[SeparationSubset $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \dot{\neg} \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\} \vdash \text{Sep2Formula} \rhd \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\} \gg \dot{\neg} \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{a}; \text{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg} \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{a} \gg \underline{s} \in \underline{x}; \text{FromSetEquality} \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \rhd \underline{x} = \underline{y} \rhd \underline{s} \in \underline{x} \gg \underline{s} \in \underline{y}; \text{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg} \underline{s} \in \underline{x} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{a} \gg \underline{a}; \text{IffSecond} \rhd \dot{\neg} \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \rhd \underline{a} \gg \underline{b}; \text{Formula2Sep} \rhd \underline{s} \in \underline{y} \rhd \underline{b} \gg \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{y} \mid \underline{b}\}; \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \dot{\neg} \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\} \vdash \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{y} \mid \underline{b}\} \gg \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{y} \mid \underline{b}\} \rceil, p_0, c)$]

[SeparationSubset $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{x} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{y} \rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg} \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{x} \mid \underline{a}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{y} \mid \underline{b}\}$]

[SeparationSubset $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "SeparationSubset"]

[SeparationSubset $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma separation subset"]

SameSeparation

[SameSeparation $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{x}\rceil \Vdash \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{y}\rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \mathrm{SeparationSubset} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \gg \underline{x}=\underline{y} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{a}\Rightarrow\underline{b}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{b}\Rightarrow\underline{a}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{x} \mid \underline{a}\}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{y}\mid\underline{b}\}; \mathrm{MP2} \rhd \underline{x}=\underline{y}\Rightarrow \dot{\neg}\underline{a}\Rightarrow\underline{b}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{b}\Rightarrow\underline{a}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{x} \mid \underline{a}\}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{y}\mid\underline{b}\} \rhd \underline{x}=\underline{y} \rhd \dot{\neg}\underline{a}\Rightarrow\underline{b}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{b}\Rightarrow\underline{a} \gg \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{x} \mid \underline{a}\}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{y}\mid\underline{b}\}; {=}\mathrm{Symmetry} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \rhd \underline{x}=\underline{y} \gg \underline{y}=\underline{x}; \mathrm{IffCommutativity} \rhd \dot{\neg}\underline{a}\Rightarrow\underline{b}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{b}\Rightarrow\underline{a} \gg \dot{\neg}\underline{b}\Rightarrow\underline{a}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{a}\Rightarrow\underline{b}; \mathrm{SeparationSubset} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \gg \underline{y}=\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b}\Rightarrow\underline{a}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{a}\Rightarrow\underline{b}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{y} \mid \underline{b}\}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{x}\mid\underline{a}\}; \mathrm{MP2} \rhd \underline{y}=\underline{x} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b}\Rightarrow\underline{a}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{a}\Rightarrow\underline{b}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{y} \mid \underline{b}\}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{x}\mid\underline{a}\} \rhd \underline{y}=\underline{x} \rhd \dot{\neg}\underline{b}\Rightarrow\underline{a}\Rightarrow\dot{\neg}\underline{a}\Rightarrow\underline{b} \gg \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{y} \mid \underline{b}\}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{x}\mid\underline{a}\}; \mathrm{ToSetEquality} \rhd \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{x} \mid \underline{a}\}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{y}\mid\underline{b}\} \rhd \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{y} \mid \underline{b}\}\Rightarrow \bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{x}\mid\underline{a}\} \gg \{\mathrm{ph}\in\underline{x} \mid \underline{a}\}=\{\mathrm{ph}\in\underline{y} \mid \underline{b}\}\rceil, \mathrm{p}_0, c)$]

[SameSeparation $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{x}\rceil \Vdash \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{y}\rceil \Vdash \underline{x} = \underline{y} \vdash \dot{\neg}\underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \{\mathrm{ph}\in\underline{x} \mid \underline{a}\}=\{\mathrm{ph}\in\underline{y} \mid \underline{b}\}$]

[SameSeparation $\stackrel{\text{tex}}{\rightarrow}$ "SameSeparation"]

[SameSeparation $\stackrel{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma same separation"]

SameBinaryUnion

[SameBinaryUnion $\stackrel{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{v}\colon \forall \underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{v},\underline{v}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{w},\underline{w}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{v},\underline{v}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{w},\underline{w}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\}\rceil \Vdash \underline{x}=\underline{y} \vdash \underline{v}=\underline{w} \vdash \mathrm{SameSingleton} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \rhd \underline{x}=\underline{y} \gg \{\underline{x},\underline{x}\}=\{\underline{y},\underline{y}\}; \mathrm{SameSingleton} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{v},\underline{v}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{w},\underline{w}\}\rceil \rhd \underline{v}=\underline{w} \gg \{\underline{v},\underline{v}\}=\{\underline{w},\underline{w}\}; \mathrm{SamePair} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{v},\underline{v}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{w},\underline{w}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\}\rceil \rhd \{\underline{x},\underline{x}\}=\{\underline{y},\underline{y}\} \rhd \{\underline{v},\underline{v}\}=\{\underline{w},\underline{w}\} \gg \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}=\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\}; \mathrm{SameUnion} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\}\rceil \rhd \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}=\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\} \gg \cup\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}=\cup\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\}; \mathrm{Repetition} \rhd \cup\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}=\cup\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\} \gg \cup\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}=\cup\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\}\rceil, \mathrm{p}_0, c)$]

[SameBinaryUnion $\stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{v}\colon \forall \underline{w}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{x}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{y}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{v}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{w}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{v},\underline{v}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\{\underline{w},\underline{w}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{x},\underline{x}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{y},\underline{y}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{v},\underline{v}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\underline{w},\underline{w}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{v},\underline{v}\}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{w},\underline{w}\}\}\rceil \Vdash$

$\lceil\mathsf{t}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{v}},\underline{\mathsf{v}}\}\}\rceil \Vdash \lceil\mathsf{t}\rceil\#^0\lceil\{\{\underline{\mathsf{y}},\underline{\mathsf{y}}\},\{\underline{\mathsf{w}},\underline{\mathsf{w}}\}\}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}}=\underline{\mathsf{y}} \vdash \underline{\mathsf{v}}=\underline{\mathsf{w}} \vdash \cup\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{v}},\underline{\mathsf{v}}\}\}=\cup\{\{\underline{\mathsf{y}},\underline{\mathsf{y}}\},\{\underline{\mathsf{w}},\underline{\mathsf{w}}\}\}]$

[SameBinaryUnion $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "SameBinaryUnion"]

[SameBinaryUnion $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma same binary union"]

IntersectionSubset

[IntersectionSubset $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{v}}\colon\forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}}=\underline{\mathsf{y}} \vdash \underline{\mathsf{v}}=\underline{\mathsf{w}} \vdash \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{v}} \vdash \text{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{v}} \gg \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}}; \text{FromSetEquality} \unrhd \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \unrhd \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \rhd \underline{\mathsf{x}}=\underline{\mathsf{y}} \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \gg \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}}; \text{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{v}} \gg \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{v}}; \text{FromSetEquality} \unrhd \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \unrhd \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \rhd \underline{\mathsf{v}}=\underline{\mathsf{w}} \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{v}} \gg \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{w}}; \text{JoinConjuncts} \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{w}} \gg \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{w}}; \forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{v}}\colon\forall\underline{\mathsf{w}}\colon \text{Ded} \rhd \forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{v}}\colon\forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}}=\underline{\mathsf{y}} \vdash \underline{\mathsf{v}}=\underline{\mathsf{w}} \vdash \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{v}} \vdash \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{w}} \gg \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}}=\underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{v}}=\underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{v}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{w}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[IntersectionSubset $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{v}}\colon\forall\underline{\mathsf{w}}\colon \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{x}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{y}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{v}}\rceil \Vdash \lceil\overline{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{w}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}}=\underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \underline{\mathsf{v}}=\underline{\mathsf{w}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{v}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{w}}$]

[IntersectionSubset $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "IntersectionSubset"]

[IntersectionSubset $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma intersection subset"]

SameIntersection

[SameIntersection $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \overline{\mathsf{x}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \vdash \overline{\mathsf{y}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \vdash \text{SameBinaryUnion} \rhd \overline{\mathsf{x}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \rhd \overline{\mathsf{y}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \gg \cup\{\{\overline{\mathsf{x}},\overline{\mathsf{x}}\},\{\overline{\mathsf{y}},\overline{\mathsf{y}}\}\}=\cup\{\{\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\},\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\},\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\}\}\}; \text{IntersectionSubset} \gg \overline{\mathsf{x}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \overline{\mathsf{y}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \overline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \overline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\}; \text{MP2} \rhd \overline{\mathsf{x}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \overline{\mathsf{y}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \overline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \overline{\mathsf{y}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \rhd \overline{\mathsf{x}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \rhd \overline{\mathsf{y}}=\{\text{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{a}_{\text{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\text{Ph}},\mathsf{b}_{\text{Ex}}\}\} \in \overline{\mathsf{r}}\} \gg \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \overline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\text{Ph}} \in \overline{\mathsf{y}} \Rightarrow$

$\dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}; = \mathrm{Symmetry} \rhd \bar{x} = \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \gg \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} = \bar{x}; =$
$\mathrm{Symmetry} \rhd \bar{y} = \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \gg \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} = \bar{y}; \mathrm{IntersectionSubset} \gg \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} = \bar{x} \Rightarrow \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} =$
$\bar{y} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y}; \mathrm{MP2} \rhd \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} = \bar{x} \Rightarrow \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} =$
$\bar{y} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y} \rhd \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} = \bar{x} \rhd \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} =$
$\bar{y} \gg \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y}; \mathrm{JoinConjuncts} \rhd \dot{\neg} c_{Ph} \in$
$\bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in$
$\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \rhd \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in$
$\bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y} \gg \dot{\neg}\dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in$
$\bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y}; \mathrm{SameSeparation} \rhd$
$\cup\{\{\bar{x},\bar{x}\},\{\bar{y},\bar{y}\}\} = \cup\{\{\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\},\{\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in$
$\overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in$
$\overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in$
$\bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in$
$\bar{y} \gg \{ph \in \cup\{\{\bar{x},\bar{x}\},\{\bar{y},\bar{y}\}\} \mid \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y}\} = \{ph \in \cup\{\{\{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\},\{\{ph \in$
$\overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \mid$
$\dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\}; \mathrm{Repetition} \rhd \{ph \in \cup\{\{\bar{x},\bar{x}\},\{\bar{y},\bar{y}\}\} \mid \dot{\neg} c_{Ph} \in$
$\bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y}\} = \{ph \in \cup\{\{\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\},\{\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in$
$\overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \mid \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in$
$\bar{r}\}\} \gg \{ph \in \cup\{\{\bar{x},\bar{x}\},\{\bar{y},\bar{y}\}\} \mid \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y}\} = \{ph \in \cup\{\{\{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\},\{\{ph \in$
$\overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \mid$
$\dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\}], p_0, c)]$

$[\mathrm{SameIntersection} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{ZFsub} \vdash \bar{x} = \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \vdash$
$\bar{y} = \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \vdash \{ph \in \cup\{\{\bar{x},\bar{x}\},\{\bar{y},\bar{y}\}\} \mid \dot{\neg} c_{Ph} \in$
$\bar{x} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \bar{y}\} = \{ph \in \cup\{\{\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in \overline{bs} \mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\},\{\{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\},\{ph \in$

$\overline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{Ph} \in \{ph \in \overline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, b_{Ex}\}\} \in \bar{r}\}\}]$

[SameIntersection $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "SameIntersection"]

[SameIntersection $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma same intersection"]

AutoMember

[AutoMember $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \forall_{obj} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \forall_{obj} \bar{t}\colon \forall_{obj} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{s} \in \underline{bs} \vdash \text{ERisReflexive} \rhd \dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \forall_{obj} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \forall_{obj} \bar{t}\colon \forall_{obj} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \gg \forall_{obj} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r}; \text{Reflexivity} \mathrel{|\!\!\rhd} \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \mathrel{|\!\!\rhd} \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \rhd \forall_{obj} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \rhd \underline{s} \in \underline{bs} \gg \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{s}\}\} \in \underline{r}; \text{Formula2Sep} \rhd \underline{s} \in \underline{bs} \rhd \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{s}\}\} \in \underline{r} \gg \underline{s} \in \{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, \underline{s}\}\} \in \underline{r}\}\rceil, p_0, c)]$

[AutoMember $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \forall_{obj} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \forall_{obj} \bar{t}\colon \forall_{obj} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{s} \in \underline{bs} \vdash \underline{s} \in \{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, \underline{s}\}\} \in \underline{r}\}]$

[AutoMember $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ "AutoMember"]

[AutoMember $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma auto member"]

HelperEqSysNot∅

[HelperEqSysNot∅ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{s} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} \rceil \Vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \forall_{obj} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\,\forall_{obj} \bar{s}\colon \forall_{obj} \bar{t}\colon \forall_{obj} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{s} \in \{ph \in P(\underline{bs}) \mid \dot{\neg}\, t_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\,\{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, t_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = b_{Ph}\} \vdash \text{Sep2Formula} \rhd \underline{s} \in \{ph \in P(\underline{bs}) \mid \dot{\neg}\, t_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\,\{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, t_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = b_{Ph}\} \gg \dot{\neg}\,\underline{s} \in P(\underline{bs}) \Rightarrow \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, a_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\,\{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = \underline{s}; \text{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg}\,\underline{s} \in P(\underline{bs}) \Rightarrow \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, a_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\,\{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = \underline{s} \gg \dot{\neg}\, a_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\,\{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = \underline{s}; \text{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg}\, a_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow$

$\dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = \underline{s} \gg a_{Ex} \in \underline{bs}$; SecondConjunct $\rhd \dot{\neg} a_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = \underline{s} \gg \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = \underline{s}$; AutoMember $\unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \rhd a_{Ex} \in \underline{bs} \gg a_{Ex} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\}$; FromSetEquality $\unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \rhd \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = \underline{s} \rhd a_{Ex} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} \gg a_{Ex} \in \underline{s}$; MemberNot∅ $\unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \rhd a_{Ex} \in \underline{s} \gg \dot{\neg}\underline{s} = \emptyset$; $\forall\underline{r}\colon \forall\underline{s}\colon \forall\underline{bs}\colon$ Ded $\rhd \forall\underline{r}\colon \forall\underline{s}\colon \forall\underline{bs}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{bs}) \mid \dot{\neg} t_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, t_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = b_{Ph}\} \vdash \dot{\neg}\underline{s} = \emptyset \gg \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{bs}) \mid \dot{\neg} t_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, t_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = b_{Ph}\} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s} = \emptyset\rceil, p_0, c)]$

[HelperEqSysNot∅ $\overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall\underline{r}\colon \forall\underline{s}\colon \forall\underline{bs}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{bs}) \mid \dot{\neg} t_{Ex} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, t_{Ex}\}\} \in \underline{r}\} = b_{Ph}\} \Rightarrow \dot{\neg}\underline{s} = \emptyset$]

[HelperEqSysNot∅ $\overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "HelperEqSysNot\O{}"]

[HelperEqSysNot∅ $\overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma eq-system not empty0"]

EqSysNot∅

[EqSysNot∅ $\overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil$ZFsub $\vdash \forall\underline{r}\colon \forall\underline{s}\colon \forall\underline{bs}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \forall_{obj}\bar{t}\colon \forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash$ HelperEqSysNot∅ $\unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{s}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, a_{Ex}\}\} \in \underline{r}\}\rceil \unrhd$

$\lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \unrhd \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \gg \dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\forall_{obj}\bar u\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow\bar u\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow\underline s\in\{ph\in$
$P(\underline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline r\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\underline s=$
$\emptyset; MP \rhd \dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in$
$\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\forall_{obj}\bar u\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in$
$\underline{bs}\Rightarrow\bar u\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\underline s\in\{ph\in P(\underline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline r\}=$
$b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\underline s=\emptyset\rhd\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\bar s\in$
$\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\forall_{obj}\bar u\colon\bar s\in$
$\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow\bar u\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\}\in\underline r\gg\underline s\in\{ph\in P(\underline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline r\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\underline s=\emptyset\rceil, p_0, c)]$

[EqSysNot∅ $\overset{stmt}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash\forall\underline r\colon\forall\underline s\colon\forall\underline{bs}\colon\lceil\bar s\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\Vdash\lceil\bar s\rceil\#^0\lceil\underline s\rceil\Vdash\lceil\bar s\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash$
$\lceil\bar s\rceil\#^0\lceil\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\}\in\underline r\}\rceil\Vdash\lceil\bar t\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\Vdash\lceil\bar t\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash$
$\lceil\bar u\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\Vdash\lceil\bar u\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\forall_{obj}\bar u\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow\bar u\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\}\in\underline r\vdash\underline s\in\{ph\in P(\underline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\dot\neg\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline r\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\underline s=\emptyset]$

[EqSysNot∅ $\overset{tex}{\rightarrow}$ "EqSysNot\O{}"]

[EqSysNot∅ $\overset{pyk}{\rightarrow}$ "lemma eq-system not empty"]

HelperEqSubset

[HelperEqSubset $\overset{proof}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil$ZFsub $\vdash\forall\underline r\colon\forall\underline s\colon\forall\underline x\colon\forall\underline y\colon\forall\underline{bs}\colon\lceil\bar s\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\Vdash$
$\lceil\bar s\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash\lceil\bar t\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\Vdash\lceil\bar t\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash\lceil\bar u\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\Vdash\lceil\bar u\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash\underline x\in\underline{bs}\vdash\underline y\in$
$\underline{bs}\vdash\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\forall_{obj}\bar u\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\bar u\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\}\in\underline r\vdash$
$\{\{\underline x,\underline x\},\{\underline x,\underline y\}\}\in\underline r\vdash\underline s\in\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline x\}\}\in\underline r\}\vdash$ Repetition $\rhd\underline s\in$
$\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline x\}\}\in\underline r\}\gg\underline s\in\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline x\}\}\in$
$\underline r\}$; Sep2Formula $\rhd\underline s\in\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline x\}\}\in\underline r\}\gg\dot\neg\underline s\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\dot\neg\{\{\underline s,\underline s\},\{\underline s,\underline x\}\}\in\underline r$; SecondConjunct $\rhd\dot\neg\underline s\in\underline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{\{\underline s,\underline s\},\{\underline s,\underline x\}\}\in\underline r\gg$
$\{\{\underline s,\underline s\},\{\underline s,\underline x\}\}\in\underline r$; ERisTransitive $\rhd\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\dot\neg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\forall_{obj}\bar u\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow\bar u\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow$
$\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\}\in\underline r\gg\forall_{obj}\bar s\colon\forall_{obj}\bar t\colon\forall_{obj}\bar u\colon\bar s\in\underline{bs}\Rightarrow\bar t\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\bar u\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\}\in\underline r\Rightarrow\{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\}\in$
$\underline r$; FirstConjunct $\rhd\dot\neg\underline s\in\underline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{\{\underline s,\underline s\},\{\underline s,\underline x\}\}\in\underline r\gg\underline s\in\underline{bs}$; Transitivity $\unrhd$
$\lceil\bar s\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\unrhd\lceil\bar s\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\unrhd\lceil\bar t\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\unrhd\lceil\bar t\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\unrhd\lceil\bar u\rceil\#^0\lceil\underline r\rceil\unrhd$

$\lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \rhd \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow$
$\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \rhd \underline{s} \in \underline{bs} \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \rhd \underline{y} \in$
$\underline{bs} \rhd \{\{\underline{s},\underline{s}\},\{\underline{s},\underline{x}\}\} \in \underline{r} \rhd \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \gg \{\{\underline{s},\underline{s}\},\{\underline{s},\underline{y}\}\} \in$
$\underline{r}; \mathrm{Formula2Sep} \rhd \underline{s} \in \underline{bs} \rhd \{\{\underline{s},\underline{s}\},\{\underline{s},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \gg \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid$
$\{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\}; \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash$
$\lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \vdash \underline{y} \in$
$\underline{bs} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash$
$\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \vdash \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid$
$\{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\} \gg \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash$
$\lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \Rightarrow \underline{y} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in$
$\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow$
$\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow$
$\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid$
$\{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\}\rceil, p_0, c)]$

$[\mathrm{HelperEqSubset} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash$
$\lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \Rightarrow \underline{y} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow$
$\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid$
$\{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\}]$

$[\mathrm{HelperEqSubset} \overset{\mathrm{tex}}{\to}$ "HelperEqSubset"$]$

$[\mathrm{HelperEqSubset} \overset{\mathrm{pyk}}{\to}$ "lemma eq subset0"$]$

EqSubset

$[\mathrm{EqSubset} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash$
$\lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \vdash \underline{y} \in \underline{bs} \vdash$
$\dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash$
$\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \vdash \mathrm{HelperEqSubset} \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \unrhd \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \unrhd \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \unrhd$
$\lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \unrhd \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \unrhd \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \gg \underline{x} \in \underline{bs} \Rightarrow \underline{y} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow$
$\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in$
$\underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid$
$\{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\}; \mathrm{MP4} \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \Rightarrow \underline{y} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow$
$\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow$

$\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\} \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \rhd \underline{y} \in \underline{bs} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \rhd \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \gg \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\}\rceil, p_0, c)]$

$[\mathrm{EqSubset} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{r}\colon \forall\underline{s}\colon \forall\underline{x}\colon \forall\underline{y}\colon \forall\underline{bs}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \vdash \underline{y} \in \underline{bs} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \vdash \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \underline{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\}]$

$[\mathrm{EqSubset} \overset{\mathrm{tex}}{\to}$ “EqSubset”]

$[\mathrm{EqSubset} \overset{\mathrm{pyk}}{\to}$ “lemma eq subset”]

HelperEqNecessary

$[\mathrm{HelperEqNecessary} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{r}\colon \forall\underline{x}\colon \forall\underline{y}\colon \forall\underline{bs}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \vdash \underline{y} \in \underline{bs} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \vdash \mathrm{EqSubset} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \unrhd \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \rhd \underline{y} \in \underline{bs} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \rhd \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \gg \bar{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \bar{s} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline{y}\}\} \in \underline{r}\}; \mathrm{ERisSymmetric} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\} \in \underline{r} \gg \forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r}; \mathrm{Symmetry} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \rhd \forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \rhd \underline{y} \in \underline{bs} \rhd \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\} \in \underline{r} \gg \{\{\underline{y},\underline{y}\},\{\underline{y},\underline{x}\}\} \in \underline{r}; \mathrm{EqSubset} \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \unrhd \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \unrhd \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \rhd \underline{y} \in \underline{bs} \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow$

$\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rhd \{\{\underline{\mathsf{y}},\underline{\mathsf{y}}\},\{\underline{\mathsf{y}},\underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}; \mathrm{ToSetEquality} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \gg \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}; \forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \gg \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

[HelperEqNecessary $\overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}$]

[HelperEqNecessary $\overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ “HelperEqNecessary”]

[HelperEqNecessary $\overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ “lemma equivalence nec condition0”]

EqNecessary

[EqNecessary $\overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil\mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \mathrm{HelperEqNecessary} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \gg \underline{\mathsf{x}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \in$

$\underline{r} \Rightarrow \{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} = \{ph \in \underline{bs} \mid \{\{a_{Ph}, a_{Ph}\}, \{a_{Ph}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\}; \mathrm{MP3} \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \Rightarrow \underline{y} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{ph\in\underline{bs}\mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\} = \{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\} \rhd \underline{x}\in\underline{bs}\rhd\underline{y}\in\underline{bs}\rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r} \gg \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{ph\in\underline{bs}\mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\} = \{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\rceil, p_0, c)]$

$[\mathrm{EqNecessary} \overset{stmt}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{r}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{bs}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \underline{x}\in\underline{bs} \vdash \underline{y}\in\underline{bs} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r} \vdash \{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{ph\in\underline{bs}\mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\} = \{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}]$

[EqNecessary $\overset{tex}{\rightarrow}$ "EqNecessary"]

[EqNecessary $\overset{pyk}{\rightarrow}$ "lemma equivalence nec condition"]

HelperNoneEqNecessary

$[\mathrm{HelperNoneEqNecessary} \overset{proof}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{r}\colon\forall\underline{s}\colon\forall\underline{x}\colon\forall\underline{y}\colon\forall\underline{bs}\colon \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil \Vdash \lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil \Vdash \underline{x}\in\underline{bs} \vdash \underline{y}\in\underline{bs} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r} \vdash \underline{s} \in \{ph \in \cup\{\{\{ph\in\underline{bs}\mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}, \{ph\in\underline{bs}\mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\}, \{\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}, \{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}\} \mid \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph\in\underline{bs}\mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\} \Rightarrow \dot{\neg} c_{Ph} \in \{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\} \vdash \mathrm{ERisSymmetric} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r} \gg \forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}; \mathrm{ERisTransitive} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \bar{t}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r} \gg \forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow \{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}; \mathrm{Sep2Formula} \rhd \underline{s} \in \{ph \in \cup\{\{\{ph\in\underline{bs}\mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}, \{ph\in\underline{bs}\mid \{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\}, \{\{ph\in\underline{bs}\mid$

$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in$
$\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\gg\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\Rightarrow\dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\};$ SecondConjunct $\rhd\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\Rightarrow\dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\gg\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\};$ FirstConjunct $\rhd\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\gg\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\};$ Sep2Formula $\rhd\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\gg\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\,\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}};$ SecondConjunct $\rhd\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\gg$
$\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}};$ SecondConjunct $\rhd\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\gg\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\};$ Sep2Formula $\rhd\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\gg\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}};$ SecondConjunct $\rhd\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\gg\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}};$ FirstConjunct $\rhd\dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\gg\underline{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}};$ Symmetry $\mathrel{|\!\!\rhd}$
$\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\mathrel{|\!\!\rhd}\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\mathrel{|\!\!\rhd}\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\mathrel{|\!\!\rhd}\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\rhd\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\rhd\underline{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\rhd\underline{\mathsf{x}}\in\underline{\mathsf{bs}}\rhd\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\gg\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}};$ Transitivity $\mathrel{|\!\!\rhd}\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\mathrel{|\!\!\rhd}\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\mathrel{|\!\!\rhd}\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\mathrel{|\!\!\rhd}$
$\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\mathrel{|\!\!\rhd}\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\mathrel{|\!\!\rhd}\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\rhd\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{u}}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\rhd\underline{\mathsf{x}}\in\underline{\mathsf{bs}}\rhd\underline{\mathsf{s}}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\rhd\underline{\mathsf{y}}\in\underline{\mathsf{bs}}\rhd\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\rhd\{\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{s}}\},\{\underline{\mathsf{s}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\gg\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}};\forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon$ Ded $\rhd\forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash$
$\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\underline{\mathsf{x}}\in\underline{\mathsf{bs}}\vdash\underline{\mathsf{y}}\in\underline{\mathsf{bs}}\vdash$
$\dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\bar{\mathsf{u}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\vdash\underline{\mathsf{s}}\in$
$\{\mathrm{ph}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\vdash\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\gg$
$\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\underline{\mathsf{x}}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\underline{\mathsf{y}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\,\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{u}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\underline{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\,\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\Rightarrow\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\rceil,\mathrm{p}_0,\mathsf{c})]$

[HelperNoneEqNecessary $\stackrel{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash\forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash$

$\lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \Rightarrow \underline{y} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot\neg\dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \forall_{\mathrm{obj}}\bar u: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \bar u \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\} \in \underline r \Rightarrow \underline s \in \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\}\},\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\}\}\} \mid \dot\neg c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\} \Rightarrow \dot\neg c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\}\} \Rightarrow \{\{\underline x,\underline x\},\{\underline x,\underline y\}\} \in \underline r]$

[HelperNoneEqNecessary $\overset{\mathrm{tex}}{\to}$ "HelperNoneEqNecessary"]

[HelperNoneEqNecessary $\overset{\mathrm{pyk}}{\to}$ "lemma none-equivalence nec condition0"]

Helper(2)NoneEqNecessary

[Helper(2)NoneEqNecessary $\overset{\mathrm{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline r: \forall \underline x: \forall \underline y: \forall \underline{bs}: \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \Vdash \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \vdash \underline{y} \in \underline{bs} \vdash \dot\neg\dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \forall_{\mathrm{obj}}\bar u: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \bar u \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\} \in \underline r \vdash \dot\neg\{\{\underline x,\underline x\},\{\underline x,\underline y\}\} \in \underline r \vdash \mathrm{HelperNoneEqNecessary} \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{s} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{t} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{r} \rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{u} \rceil \#^0 \lceil \underline{bs} \rceil \gg \underline{x} \in \underline{bs} \Rightarrow \underline{y} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot\neg\dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \forall_{\mathrm{obj}}\bar u: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \bar u \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\} \in \underline r \Rightarrow \bar s \in \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\}\},\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\}\}\} \mid \dot\neg c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\} \Rightarrow \dot\neg c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\}\} \Rightarrow \{\{\underline x,\underline x\},\{\underline x,\underline y\}\} \in \underline r; \mathrm{MP3} \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \Rightarrow \underline{y} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot\neg\dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \forall_{\mathrm{obj}}\bar u: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \bar u \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\} \in \underline r \Rightarrow \bar s \in \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\}\},\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\}\}\} \mid \dot\neg c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\} \Rightarrow \dot\neg c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\}\} \Rightarrow \{\{\underline x,\underline x\},\{\underline x,\underline y\}\} \in \underline r \rhd \underline x \in \underline{bs} \rhd \underline y \in \underline{bs} \rhd \dot\neg\dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar s\}\} \in \underline r \Rightarrow \dot\neg\forall_{\mathrm{obj}}\bar s: \forall_{\mathrm{obj}}\bar t: \forall_{\mathrm{obj}}\bar u: \bar s \in \underline{bs} \Rightarrow \bar t \in \underline{bs} \Rightarrow \bar u \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar t\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar t,\bar t\},\{\bar t,\bar u\}\} \in \underline r \Rightarrow \{\{\bar s,\bar s\},\{\bar s,\bar u\}\} \in \underline r \gg \bar s \in \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\}\},\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\}\}\} \mid \dot\neg c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\} \Rightarrow \dot\neg c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline y\}\} \in \underline r\}\} \Rightarrow \{\{\underline x,\underline x\},\{\underline x,\underline y\}\} \in \underline r; \mathrm{MT} \rhd \bar s \in \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}},a_{\mathrm{Ph}}\},\{a_{\mathrm{Ph}},\underline x\}\} \in \underline r\},\{\mathrm{ph} \in \underline{bs} \mid$

$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\Rightarrow\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\rhd\dot{\neg}\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\gg\dot{\neg}\bar{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\}\};\mathrm{Unique}\emptyset\rhd\dot{\neg}\bar{\mathsf{s}}\in\{\mathrm{ph}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\gg\{\mathrm{ph}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in$
$\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid$
$\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}=\emptyset;\forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon\mathrm{Ded}\rhd\forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash$
$\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\underline{\mathsf{x}}\in\underline{\mathsf{bs}}\vdash\underline{\mathsf{y}}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\vdash\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\bar{\mathsf{u}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\vdash$
$\dot{\neg}\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\vdash\{\mathrm{ph}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}=\emptyset\gg\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash$
$\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\underline{\mathsf{x}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\underline{\mathsf{y}}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\bar{\mathsf{u}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\mathrm{ph}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}=\emptyset\rceil,\mathrm{p}_0,\mathsf{c})]$

[Helper(2)NoneEqNecessary $\overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash\forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{x}}\colon\forall\underline{\mathsf{y}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash$
$\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil\Vdash\lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil\Vdash\underline{\mathsf{x}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\underline{\mathsf{y}}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon\bar{\mathsf{s}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\bar{\mathsf{t}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow$
$\bar{\mathsf{u}}\in\underline{\mathsf{bs}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\Rightarrow\{\mathrm{ph}\in\cup\{\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\},\{\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\},\{\mathrm{ph}\in$
$\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}\}\mid\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{x}}\}\}\in$
$\underline{\mathsf{r}}\}\Rightarrow\dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{\mathsf{bs}}\mid\{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\underline{\mathsf{y}}\}\}\in\underline{\mathsf{r}}\}\}=\emptyset$]

[Helper(2)NoneEqNecessary $\overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ “Helper(2)NoneEqNecessary”]

[Helper(2)NoneEqNecessary $\overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ “lemma none-equivalence nec condition1”]

NoneEqNecessary

[NoneEqNecessary $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \vdash \underline{y} \in \underline{bs} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r} \vdash$ $\text{Helper(2)NoneEqNecessary} \unrhd \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \unrhd \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \unrhd \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \unrhd \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \unrhd \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \unrhd \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \gg \underline{x}\in\underline{bs}\Rightarrow\underline{y}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow$ $\dot{\neg}\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\text{ph}\in\cup\{\{\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\},\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\},\{\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\},\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}\}\mid\dot{\neg}c_{\text{Ph}}\in\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\Rightarrow\dot{\neg}c_{\text{Ph}}\in\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}=\emptyset;\text{MP3}\rhd\underline{x}\in\underline{bs}\Rightarrow\underline{y}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow$ $\dot{\neg}\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\text{ph}\in\cup\{\{\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\},\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\},\{\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\},\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}\}\mid\dot{\neg}c_{\text{Ph}}\in\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\Rightarrow\dot{\neg}c_{\text{Ph}}\in\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}=\emptyset\rhd\underline{x}\in\underline{bs}\rhd\underline{y}\in\underline{bs}\rhd\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\gg$ $\dot{\neg}\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\text{ph}\in\cup\{\{\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\},\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\},\{\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\},\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}\}\mid\dot{\neg}c_{\text{Ph}}\in\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\Rightarrow\dot{\neg}c_{\text{Ph}}\in\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}=\emptyset\rceil, p_0, c)$]

[NoneEqNecessary $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \vdash \underline{y} \in \underline{bs} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon \bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{\text{obj}}\bar{s}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{t}\colon\forall_{\text{obj}}\bar{u}\colon\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow \bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r} \vdash$ $\dot{\neg}\{\{\underline{x},\underline{x}\},\{\underline{x},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\text{ph}\in\cup\{\{\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\},\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\},\{\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\},\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}\}\mid\dot{\neg}c_{\text{Ph}}\in\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{x}\}\}\in\underline{r}\}\Rightarrow\dot{\neg}c_{\text{Ph}}\in\{\text{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{\text{Ph}},a_{\text{Ph}}\},\{a_{\text{Ph}},\underline{y}\}\}\in\underline{r}\}\}=\emptyset$]

[NoneEqNecessary $\overset{\text{tex}}{\rightarrow}$ “NoneEqNecessary”]

[NoneEqNecessary $\overset{\text{pyk}}{\rightarrow}$ “lemma none-equivalence nec condition”]

EqClassIsSubset

[EqClassIsSubset $\overset{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{bs}\colon \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \vdash \text{Sep2Formula} \rhd \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \gg \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}; \text{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg}\, \underline{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\{\underline{s}, \underline{s}\}, \{\underline{s}, \underline{x}\}\} \in \underline{r} \gg \underline{s} \in \underline{bs}; \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{bs}\colon \text{Ded} \rhd \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{bs}\colon \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \vdash \underline{s} \in \underline{bs} \gg \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{bs}\rceil, p_0, c)$]

[EqClassIsSubset $\overset{\text{stmt}}{\to} \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{s}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{bs}\colon \underline{s} \in \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \underline{s} \in \underline{bs}$]

[EqClassIsSubset $\overset{\text{tex}}{\to}$ “EqClassIsSubset”]

[EqClassIsSubset $\overset{\text{pyk}}{\to}$ “lemma equivalence class is subset”]

EqClassesAreDisjoint

[EqClassesAreDisjoint $\overset{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}\colon \forall \underline{x}\colon \forall \underline{y}\colon \forall \underline{bs}\colon \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \underline{x} \in \underline{bs} \vdash \underline{y} \in \underline{bs} \vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \vdash \dot{\neg}\, \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} = \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\} \vdash \text{EqNecessary} \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \rhd \underline{y} \in \underline{bs} \rhd \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \gg \{\{\underline{x}, \underline{x}\}, \{\underline{x}, \underline{y}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} = \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\}; \text{MT} \rhd \{\{\underline{x}, \underline{x}\}, \{\underline{x}, \underline{y}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} = \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\} \rhd \dot{\neg}\, \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} = \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\} \gg \dot{\neg}\, \{\{\underline{x}, \underline{x}\}, \{\underline{x}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}; \text{NoneEqNecessary} \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \mathrel{|\!\rhd} \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \rhd \underline{x} \in \underline{bs} \rhd \underline{y} \in \underline{bs} \rhd \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\text{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\text{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \underline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \underline{r} \gg \dot{\neg}\, \{\{\underline{x}, \underline{x}\}, \{\underline{x}, \underline{y}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\text{ph} \in \cup\{\{\{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\}, \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\}\}, \{\{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\}, \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\text{Ph}} \in \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\text{Ph}} \in \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\}\} = \emptyset; \text{MP} \rhd \dot{\neg}\, \{\{\underline{x}, \underline{x}\}, \{\underline{x}, \underline{y}\}\} \in \underline{r} \Rightarrow \{\text{ph} \in \cup\{\{\{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\}, \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in \underline{r}\}\}, \{\{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\}, \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{y}\}\} \in \underline{r}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\text{Ph}} \in \{\text{ph} \in \underline{bs} \mid \{\{a_{\text{Ph}}, a_{\text{Ph}}\}, \{a_{\text{Ph}}, \underline{x}\}\} \in$

$\underline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}\} = \emptyset \rhd \dot{\neg}\, \{\{\underline{\mathsf{x}}, \underline{\mathsf{x}}\}, \{\underline{\mathsf{x}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}, \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}\}, \{\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}, \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}\} = \emptyset\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

[EqClassesAreDisjoint $\overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{x}}\colon \forall \underline{\mathsf{y}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{s}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{t}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{u}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{r}} \rceil \Vdash \lceil \bar{\mathsf{u}} \rceil \#^0 \lceil \underline{\mathsf{bs}} \rceil \Vdash \underline{\mathsf{x}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \underline{\mathsf{y}} \in \underline{\mathsf{bs}} \vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \vdash \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}, \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}\}, \{\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}, \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{x}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \underline{\mathsf{y}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\}\} = \emptyset$]

[EqClassesAreDisjoint $\overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "EqClassesAreDisjoint"]

[EqClassesAreDisjoint $\overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma equivalence classes are disjoint"]

AllDisjoint

[AllDisjoint $\overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil$ZFsub $\vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{s}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{u}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{u}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \vdash \bar{\mathsf{x}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \bar{\mathsf{y}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{x}} = \bar{\mathsf{y}} \vdash$ Sep2Formula $\rhd \bar{\mathsf{x}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \gg \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{x}} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \Rightarrow \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{x}};$ SecondConjunct $\rhd \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{x}} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \Rightarrow \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{x}} \gg \dot{\neg}\, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{x}};$ FirstConjunct $\rhd \dot{\neg}\, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{x}} \gg \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}};$ SecondConjunct $\rhd \dot{\neg}\, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{x}} \gg \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{x}};$ =Symmetry $\rhd \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{x}} \gg \bar{\mathsf{x}} = \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\};$ Sep2Formula $\rhd \bar{\mathsf{y}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \gg \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{y}} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \Rightarrow \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{y}};$ SecondConjunct $\rhd \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{y}} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \Rightarrow \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{y}} \gg \dot{\neg}\, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{y}};$ FirstConjunct $\rhd \dot{\neg}\, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \bar{\mathsf{y}} \gg \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}};$ SecondConjunct $\rhd \dot{\neg}\, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{b}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} =$

$\bar{y} \gg \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} = \bar{y}$; $=$Symmetry $\rhd \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} = \bar{y} \gg \bar{y} = \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}$; TransferNotEq $\rhd \dot{\neg}\, \bar{x} = \bar{y} \rhd \bar{x} = \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \rhd \bar{y} = \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \gg \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} = \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}$; EqClassesAreDisjoint $\rhd a_{\mathrm{Ex}} \in \overline{bs} \rhd b_{\mathrm{Ex}} \in \overline{bs} \rhd \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \overline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \overline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \overline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \overline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \overline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \overline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \bar{r} \rhd \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} = \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \gg \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}, \{\{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\} = \emptyset$; SameIntersection $\rhd \bar{x} = \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \rhd \bar{y} = \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \gg \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\bar{x}, \bar{x}\}, \{\bar{y}, \bar{y}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \bar{y}\} = \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}, \{\{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}$; $=$Transitivity $\rhd \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\bar{x}, \bar{x}\}, \{\bar{y}, \bar{y}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \bar{y}\} = \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}, \{\{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\} \rhd \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}, \{\{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, b_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\}\} = \emptyset \gg \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\bar{x}, \bar{x}\}, \{\bar{y}, \bar{y}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \bar{y}\} = \emptyset\rceil, p_0, c)]$

[AllDisjoint $\overset{\mathrm{stmt}}{\to}$ ZFsub $\vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \bar{s} \in \overline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{s}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \bar{s} \in \overline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \overline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{s}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \dot{\neg}\, \forall_{\mathrm{obj}} \bar{s}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{t}\colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{u}\colon \bar{s} \in \overline{bs} \Rightarrow \bar{t} \in \overline{bs} \Rightarrow \bar{u} \in \overline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{t}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \{\{\bar{t}, \bar{t}\}, \{\bar{t}, \bar{u}\}\} \in \bar{r} \Rightarrow \{\{\bar{s}, \bar{s}\}, \{\bar{s}, \bar{u}\}\} \in \bar{r} \vdash \bar{x} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{bs}) \mid \dot{\neg}\, t_{\mathrm{Ex}} \in \overline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, t_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} = b_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \bar{y} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{bs}) \mid \dot{\neg}\, t_{\mathrm{Ex}} \in \overline{bs} \Rightarrow \dot{\neg}\, \{\mathrm{ph} \in \overline{bs} \mid \{\{a_{\mathrm{Ph}}, a_{\mathrm{Ph}}\}, \{a_{\mathrm{Ph}}, t_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{r}\} = b_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \dot{\neg}\, \bar{x} = \bar{y} \vdash \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\bar{x}, \bar{x}\}, \{\bar{y}, \bar{y}\}\} \mid \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \bar{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, c_{\mathrm{Ph}} \in \bar{y}\} = \emptyset$]

[AllDisjoint $\overset{\mathrm{tex}}{\to}$ "AllDisjoint"]

[AllDisjoint $\overset{\mathrm{pyk}}{\to}$ "lemma all disjoint"]

AllDisjointImply

[AllDisjointImply $\overset{\mathrm{proof}}{\to}$ $\lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \underline{\mathsf{x}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \underline{\mathsf{y}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \dot{\neg}\underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \vdash \mathrm{CheatAllDisjoint} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \rhd \underline{\mathsf{x}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \rhd \underline{\mathsf{y}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \rhd \dot{\neg}\underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \gg \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{y}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \mid \dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \underline{\mathsf{y}}\} = \emptyset; \forall\underline{\mathsf{r}}\colon \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{\mathsf{r}}\colon \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \underline{\mathsf{x}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \underline{\mathsf{y}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \dot{\neg}\underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \vdash \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{y}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \mid \dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \underline{\mathsf{y}}\} = \emptyset \gg \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash$ $\lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow$ $\dot{\neg}\underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{y}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \mid \dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \underline{\mathsf{y}}\} = \emptyset\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[AllDisjointImply $\overset{\mathrm{stmt}}{\to}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon \forall\underline{\mathsf{x}}\colon \forall\underline{\mathsf{y}}\colon \forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash$ $\lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow$ $\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{x}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \underline{\mathsf{y}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow$ $\dot{\neg}\underline{\mathsf{x}} = \underline{\mathsf{y}} \Rightarrow \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\underline{\mathsf{x}},\underline{\mathsf{x}}\},\{\underline{\mathsf{y}},\underline{\mathsf{y}}\}\} \mid \dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \underline{\mathsf{x}} \Rightarrow \dot{\neg}\mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \underline{\mathsf{y}}\} = \emptyset$]

[AllDisjointImply $\overset{\mathrm{tex}}{\to}$ “AllDisjointImply”]

[AllDisjointImply $\overset{\mathrm{pyk}}{\to}$ “lemma all disjoint-imply”]

BSsubset

[BSsubset $\overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}{:}\, \forall \underline{s}{:}\, \forall \underline{bs}{:}\, \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash$
$\dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\, \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\forall_{obj}\bar{u}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\vdash\underline{s}\in\underline{bs}\vdash$
$\mathrm{AutoMember} \rhd\!\!\rhd \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \rhd\!\!\rhd \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\, \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in$
$\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\forall_{obj}\bar{u}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow$
$\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\rhd\underline{s}\in\underline{bs}\gg\underline{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\};\mathrm{EqClassIsSubset}\gg\bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{bs};\mathrm{SubsetInPower}\rhd\bar{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{bs}\gg\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\in$
$\mathrm{P}(\underline{bs});{=}\mathrm{Reflexivity}\gg\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}=\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\};\mathrm{JoinConjuncts}\rhd\underline{s}\in\underline{bs}\rhd\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}=\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\gg\dot{\neg}\,\underline{s}\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}=\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in$
$\underline{r}\};\mathrm{ExistIntro}\,@\,a_{Ex}\,@\,\underline{s}\rhd\dot{\neg}\,\underline{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}=$
$\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\gg\dot{\neg}\,a_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in$
$\underline{r}\};\mathrm{Formula2Sep}\rhd\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\in\mathrm{P}(\underline{bs})\rhd\dot{\neg}\,a_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},a_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in$
$\underline{r}\}\gg\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\in\{\mathrm{ph}\in\mathrm{P}(\underline{bs})\mid\dot{\neg}\,t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\};\mathrm{ExistIntro}\,@\,j_{Ex}\,@\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\rhd\underline{s}\in\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\gg\underline{s}\in$
$j_{Ex};\mathrm{ExistIntro}\,@\,j_{Ex}\,@\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\rhd\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},\underline{s}\}\}\in\underline{r}\}\in\{\mathrm{ph}\in\mathrm{P}(\underline{bs})\mid\dot{\neg}\,t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\}\gg j_{Ex}\in\{\mathrm{ph}\in\mathrm{P}(\underline{bs})\mid\dot{\neg}\,t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow$
$\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\};\mathrm{Formula2Union}\rhd\underline{s}\in$
$j_{Ex}\rhd j_{Ex}\in\{\mathrm{ph}\in\mathrm{P}(\underline{bs})\mid\dot{\neg}\,t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in$
$\underline{r}\}=b_{Ph}\}\gg\underline{s}\in\cup\{\mathrm{ph}\in\mathrm{P}(\underline{bs})\mid\dot{\neg}\,t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\};\forall\underline{r}{:}\,\forall\underline{s}{:}\,\forall\underline{bs}{:}\,\mathrm{Ded}\rhd\forall\underline{r}{:}\,\forall\underline{s}{:}\,\forall\underline{bs}{:}\,\lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash$
$\lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\, \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\forall_{obj}\bar{u}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\vdash$
$\underline{s}\in\underline{bs}\vdash\underline{s}\in\cup\{\mathrm{ph}\in\mathrm{P}(\underline{bs})\mid\dot{\neg}\,t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in$
$\underline{r}\}=b_{Ph}\}\gg\lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash$
$\lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\, \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\forall_{obj}\bar{u}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow$
$\underline{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\underline{s}\in\cup\{\mathrm{ph}\in\mathrm{P}(\underline{bs})\mid\dot{\neg}\,t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot{\neg}\{\mathrm{ph}\in\underline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\}\rceil,\mathrm{p}_0,c)$]

[BSsubset $\overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{r}{:}\, \forall \underline{s}{:}\, \forall \underline{bs}{:}\, \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{s}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash$
$\lceil \bar{t}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{r}\rceil \Vdash \lceil \bar{u}\rceil \#^0 \lceil \underline{bs}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\, \bar{s}\in\underline{bs} \Rightarrow \{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r} \Rightarrow$
$\dot{\neg}\forall_{obj}\bar{s}{:}\,\forall_{obj}\bar{t}{:}\,\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow$

$\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\}$]

[BSsubset $\stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "BSsubset"]

[BSsubset $\stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "lemma bs subset union(bs/r)"]

Union(BS/R)subset

[Union(BS/R)subset $\stackrel{\mathrm{proof}}{\to}$ $\lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \vdash$ $\mathrm{Union2Formula} \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \gg \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\};$ $\mathrm{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \gg \underline{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}};$ $\mathrm{SecondConjunct} \rhd \dot{\neg}\,\underline{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \dot{\neg}\,\mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \gg \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\};$ $\mathrm{Sep2Formula} \rhd \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \gg \dot{\neg}\,\mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \Rightarrow \dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\mathsf{a}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}};$ $\mathrm{FirstConjunct} \rhd \dot{\neg}\,\mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \Rightarrow \dot{\neg}\,\dot{\neg}\,\mathsf{a}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \gg \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}});$ $(\mathrm{Switch})\mathrm{PowerIsSub} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \rhd \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \gg \bar{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}};$ $\mathrm{Gen} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \gg \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}};$ $(\mathrm{Switch})\mathrm{HelperPowerIsSub} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \gg \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}};$ $\mathrm{MP2} \rhd \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \rhd \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \rhd \underline{\mathsf{s}} \in \mathsf{j}_{\mathrm{Ex}} \gg \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}};$ $\forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \vdash \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \gg \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\,\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}}\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[Union(BS/R)subset $\stackrel{\mathrm{stmt}}{\to}$ $\mathrm{ZFsub} \vdash \forall\underline{\mathsf{r}}\colon\forall\underline{\mathsf{s}}\colon\forall\underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil\#^0\lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\,\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow$

$\{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \underline{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}}$]

[Union(BS/R)subset $\stackrel{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "Union(BS/R)subset"]

[Union(BS/R)subset $\stackrel{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "lemma union(bs/r) subset bs"]

UnionIdentity

[UnionIdentity $\stackrel{\mathrm{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub} \vdash \forall \underline{\mathsf{r}}\colon \forall \underline{\mathsf{bs}}\colon \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \Vdash \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \Vdash \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \vdash \mathrm{BSsubset} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \gg \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\}; \mathrm{MP} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\}; \mathrm{Union(BS/R)subset} \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{s}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{t}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{r}}\rceil \unrhd \lceil\bar{\mathsf{u}}\rceil \#^0 \lceil\underline{\mathsf{bs}}\rceil \gg \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}}; \mathrm{MP} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \rhd \dot{\neg}\dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{s}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg}\forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{s}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{t}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\bar{\mathsf{u}}\colon \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{t}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{t}}\},\{\bar{\mathsf{t}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{s}}\},\{\bar{\mathsf{s}},\bar{\mathsf{u}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}} \gg \bar{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\},\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}},\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \underline{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \bar{\mathsf{s}} \in \underline{\mathsf{bs}}; \mathrm{ToSetEquality} \rhd \bar{\mathsf{s}} \in \cup\{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\underline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \underline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg}\{\mathrm{ph} \in \underline{\mathsf{bs}} \mid$

$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{s}\in\underline{bs}\rhd\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{s}\in\cup\{ph\in P(\underline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\}\gg\cup\{ph\in P(\underline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\}=\underline{bs}\rceil,p_0,c)]$

[UnionIdentity $\overset{stmt}{\rightarrow}$ ZFsub $\vdash\forall\underline{r}:\forall\underline{bs}:\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil\Vdash\lceil\bar{s}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash\lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil\Vdash\lceil\bar{t}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash\lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{r}\rceil\Vdash\lceil\bar{u}\rceil\#^0\lceil\underline{bs}\rceil\Vdash\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\forall_{obj}\bar{u}:\bar{s}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\underline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\underline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\underline{r}\vdash\cup\{ph\in P(\underline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\underline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\underline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\underline{r}\}=b_{Ph}\}=\underline{bs}$]

[UnionIdentity $\overset{tex}{\rightarrow}$ "UnionIdentity"]

[UnionIdentity $\overset{pyk}{\rightarrow}$ "lemma union(bs/r) is bs"]

EqSysIsPartition

[EqSysIsPartition $\overset{proof}{\rightarrow}\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{ZFsub}\vdash\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\forall_{obj}\bar{u}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\vdash\mathrm{EqSysNot}\emptyset\rhd\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\forall_{obj}\bar{u}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\gg\bar{x}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{x}=\emptyset;\mathrm{Ded}\rhd\bar{x}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{x}=\emptyset\gg\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\emptyset;\mathrm{Gen}\rhd\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\emptyset\gg\forall_{obj}\bar{s}:\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\emptyset;\mathrm{AllDisjointImply}\gg\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\forall_{obj}\bar{u}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset;\mathrm{MP}\rhd\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\forall_{obj}\bar{u}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset\rhd\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}:\forall_{obj}\bar{t}:\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow$

$\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\overline{bs}\Rightarrow$
$\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\gg\bar{s}\in\{ph\in$
$P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow$
$\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset;\mathrm{Gen}\rhd\bar{s}\in\{ph\in$
$P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow$
$\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset\gg\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in\{ph\in$
$P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow$
$\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset;\mathrm{Gen}\rhd\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in$
$\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow$
$\bar{t}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=$
$b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset\gg$
$\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in$
$\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid$
$\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset;\mathrm{UnionIdentity}\rhd\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{s}\}\}\in$
$\bar{r}\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{s}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow$
$\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\forall_{obj}\bar{u}\colon\bar{s}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{t}\in\overline{bs}\Rightarrow\bar{u}\in\overline{bs}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{t}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow$
$\{\{\bar{t},\bar{t}\},\{\bar{t},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\Rightarrow\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{s},\bar{u}\}\}\in\bar{r}\gg\cup\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in$
$\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}=\overline{bs};\mathrm{JoinConjuncts}\rhd\forall_{obj}\bar{s}\colon\bar{s}\in\{ph\in$
$P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=$
$\emptyset\rhd\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in$
$\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid$
$\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset\gg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in$
$\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\emptyset\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in\{ph\in$
$P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow$
$\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=$
$\emptyset;\mathrm{JoinConjuncts}\rhd\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\emptyset\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in\{ph\in$
$P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in$
$\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow$
$\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset\rhd\cup\{ph\in P(\overline{bs})\mid$
$\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}=\overline{bs}\gg$
$\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in$
$\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\emptyset\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in$
$\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow$
$\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\dot\neg\bar{s}=\bar{t}\Rightarrow\{ph\in$
$\cup\{\{\bar{s},\bar{s}\},\{\bar{t},\bar{t}\}\}\mid\dot\neg c_{Ph}\in\bar{s}\Rightarrow\dot\neg c_{Ph}\in\bar{t}\}=\emptyset\Rightarrow\dot\neg\cup\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow$
$\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}=\overline{bs};\mathrm{Repetition}\rhd\dot\neg\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\bar{s}\in$
$\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow$
$\dot\neg\bar{s}=\emptyset\Rightarrow\dot\neg\forall_{obj}\bar{s}\colon\forall_{obj}\bar{t}\colon\bar{s}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in\overline{bs}\mid$
$\{\{a_{Ph},a_{Ph}\},\{a_{Ph},t_{Ex}\}\}\in\bar{r}\}=b_{Ph}\}\Rightarrow\bar{t}\in\{ph\in P(\overline{bs})\mid\dot\neg t_{Ex}\in\overline{bs}\Rightarrow\dot\neg\{ph\in$

$\overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{s}} = \bar{\mathsf{t}} \Rightarrow \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \mid \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \bar{\mathsf{s}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \bar{\mathsf{t}}\} = \emptyset \Rightarrow \dot{\neg} \cup \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} = \overline{\mathsf{bs}} \gg \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{s}} = \emptyset \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{s}} = \bar{\mathsf{t}} \Rightarrow \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \mid \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \bar{\mathsf{s}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \bar{\mathsf{t}}\} = \emptyset \Rightarrow \dot{\neg} \cup \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} = \overline{\mathsf{bs}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{EqSysIsPartition} \overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{ZFsub} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{s}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{u}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \bar{\mathsf{u}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{u}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \Rightarrow \{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{u}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}} \vdash \dot{\neg}\dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{s}} = \emptyset \Rightarrow \dot{\neg} \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{s}} \colon \forall_{\mathrm{obj}} \bar{\mathsf{t}} \colon \bar{\mathsf{s}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \bar{\mathsf{t}} \in \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} \Rightarrow \dot{\neg}\, \bar{\mathsf{s}} = \bar{\mathsf{t}} \Rightarrow \{\mathrm{ph} \in \cup\{\{\bar{\mathsf{s}}, \bar{\mathsf{s}}\}, \{\bar{\mathsf{t}}, \bar{\mathsf{t}}\}\} \mid \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \bar{\mathsf{s}} \Rightarrow \dot{\neg}\, \mathsf{c}_{\mathrm{Ph}} \in \bar{\mathsf{t}}\} = \emptyset \Rightarrow \dot{\neg} \cup \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\overline{\mathsf{bs}}) \mid \dot{\neg}\, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}} \in \overline{\mathsf{bs}} \Rightarrow \dot{\neg} \{\mathrm{ph} \in \overline{\mathsf{bs}} \mid \{\{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}\}, \{\mathsf{a}_{\mathrm{Ph}}, \mathsf{t}_{\mathrm{Ex}}\}\} \in \bar{\mathsf{r}}\} = \mathsf{b}_{\mathrm{Ph}}\} = \overline{\mathsf{bs}}]$

$[\mathrm{EqSysIsPartition} \overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "EqSysIsPartition"]

$[\mathrm{EqSysIsPartition} \overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "theorem eq-system is partition"]

$*/*$

$[\mathsf{bs}/\mathsf{r} \overset{\mathrm{macro}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{bs}/\mathsf{r} \ddot{=} \{\mathrm{ph} \in \mathrm{P}(\mathsf{bs}) \mid \mathrm{Ex}_{20} \in \mathsf{bs} \dot{\wedge} [\mathrm{Ex}_{20} \in \mathsf{bs}]_{\mathsf{r}} = \mathrm{ph}_2\}] \rceil)]$

$[\mathsf{x}/\mathsf{y} \overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "#1.
/ #2."]

$[*/* \overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "eq-system of " modulo ""]

$* \bigcap *$

$[\mathsf{x} \cap \mathsf{y} \overset{\mathrm{macro}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{x} \cap \mathsf{y} \ddot{=} \{\mathrm{ph} \in \mathsf{x} \cup \mathsf{y} \mid \mathrm{ph}_3 \in \mathsf{x} \dot{\wedge} \mathrm{ph}_3 \in \mathsf{y}\}] \rceil)]$

$[\mathsf{x} \cap \mathsf{y} \overset{\mathrm{tex}}{\rightarrow}$ "#1.
\cap #2."]

$[* \cap * \overset{\mathrm{pyk}}{\rightarrow}$ "intersection " comma " end intersection"]

$\bigcup *$

$[\bigcup \mathsf{x} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "\cup #1."]

$[\bigcup * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "union " end union"]

$* \cup *$

$[\mathsf{x} \cup \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil[\mathsf{x} \cup \mathsf{y} \ddot{=} \bigcup\{\{\mathsf{x}\}, \{\mathsf{y}\}\}]\rceil)]$

$[\mathsf{x} \cup \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel{\cup} #2."]

$[* \cup * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "binary-union " comma " end union"]

$\mathrm{P}(*)$

$[\mathrm{P}(\mathsf{x}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "P(#1.
)"]

$[\mathrm{P}(*) \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "power " end power"]

$\{*\}$

$[\{\mathsf{x}\} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil[\{\mathsf{x}\} \ddot{=} \{\mathsf{x}, \mathsf{x}\}]\rceil)]$

$[\{\mathsf{x}\} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "\{#1.
\}"]

$[\{*\} \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "zermelo singleton " end singleton"]

$\{*, *\}$

$[\{\mathsf{x}, \mathsf{y}\} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "\{#1.
, #2.
\}"]

$[\{*, *\} \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "zermelo pair " comma " end pair"]

$\langle *, * \rangle$

$[\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle \overset{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle \ddot{=} \{\{\mathsf{x}\}, \{\mathsf{x}, \mathsf{y}\}\}] \rceil)]$

$[\langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle \overset{\text{tex}}{\to}$ "\langle #1.
, #2.
\rangle"]

$[\langle *, * \rangle \overset{\text{pyk}}{\to}$ "zermelo ordered pair " comma " end pair"]

$* \in *$

$[\mathsf{x} \in \mathsf{y} \overset{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel{\in} #2."]

$[* \in * \overset{\text{pyk}}{\to}$ "" zermelo in ""]

$*(*, *)$

$[\mathsf{r}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \overset{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{r}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \ddot{=} \langle \mathsf{x}, \mathsf{y} \rangle \in \mathsf{r}] \rceil)]$

$[\mathsf{z}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \overset{\text{tex}}{\to}$ "#3.
(#1.
, #2.
)"]

$[*(*, *) \overset{\text{pyk}}{\to}$ "" is related to " under ""]

ReflRel$(*, *)$

$[\mathrm{ReflRel}(\mathsf{r}, \mathsf{x}) \overset{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathrm{ReflRel}(\mathsf{r}, \mathsf{x}) \ddot{=} \forall s \colon (s \in \mathsf{x} \Rightarrow \mathsf{r}(s, s))] \rceil)]$

$[\mathrm{ReflRel}(\mathsf{r}, \mathsf{x}) \overset{\text{tex}}{\to}$ "ReflRel(#1.
, #2.
)"]

$[\mathrm{ReflRel}(*, *) \overset{\text{pyk}}{\to}$ "" is reflexive relation in ""]

SymRel$(*, *)$

$[\mathrm{SymRel}(\mathsf{r}, \mathsf{x}) \overset{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathrm{SymRel}(\mathsf{r}, \mathsf{x}) \ddot{=} \forall s,$
$t \colon (s \in \mathsf{x} \Rightarrow t \in \mathsf{x} \Rightarrow \mathsf{r}(s, t) \Rightarrow \mathsf{r}(t, s))] \rceil)]$

$[\mathrm{SymRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "SymRel(#1.
, #2.
)"]

$[\mathrm{SymRel}(*,*) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "" is symmetric relation in ""]

TransRel(∗, ∗)

$[\mathrm{TransRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathrm{TransRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \ddot{=} \forall s,t,u\colon (s \in \mathsf{x} \Rightarrow t \in \mathsf{x} \Rightarrow u \in \mathsf{x} \Rightarrow \mathsf{r}(s,t) \Rightarrow \mathsf{r}(t,u) \Rightarrow \mathsf{r}(s,u))]\rceil)]$

$[\mathrm{TransRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "TransRel(#1.
, #2.
)"]

$[\mathrm{TransRel}(*,*) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "" is transitive relation in ""]

EqRel(∗, ∗)

$[\mathrm{EqRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathrm{EqRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \ddot{=} \mathrm{ReflRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \dot{\wedge} \mathrm{SymRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \dot{\wedge} \mathrm{TransRel}(\mathsf{r},\mathsf{x})]\rceil)]$

$[\mathrm{EqRel}(\mathsf{r},\mathsf{x}) \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "EqRel(#1.
, #2.
)"]

$[\mathrm{EqRel}(*,*) \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "" is equivalence relation in ""]

$[* \in *]_*$

$[[\mathsf{x} \in \mathsf{bs}]_{\mathsf{r}} \stackrel{\mathrm{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[[\mathsf{x} \in \mathsf{bs}]_{\mathsf{r}} \ddot{=} \{\mathrm{ph} \in \mathsf{bs} \mid \mathsf{r}(\mathrm{ph}_1,\mathsf{x})\}]\rceil)]$

$[[\mathsf{x} \in \mathsf{bs}]_{\mathsf{r}} \stackrel{\mathrm{tex}}{\to}$ "[#1.
\mathrel{\in} #2.
]_{#3.
}"]

$[[* \in *]_* \stackrel{\mathrm{pyk}}{\to}$ "equivalence class of " in " modulo ""]

Partition$(*, *)$

[Partition$(\mathsf{p}, \mathsf{bs}) \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil[\text{Partition}(\mathsf{p}, \mathsf{bs}) \mathrel{\ddot{=}} (\forall s\colon (s \in \mathsf{p} \Rightarrow s \neq$
$\emptyset)) \mathrel{\dot{\wedge}}$
$(\forall s, t\colon (s \in \mathsf{p} \Rightarrow t \in \mathsf{p} \Rightarrow s \neq t \Rightarrow s \cap t = \emptyset)) \mathrel{\dot{\wedge}}$
$\cup\, \mathsf{p} = \mathsf{bs}]\rceil)$]

[Partition$(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "Partition(#1.
, #2.
)"]

[Partition$(*, *) \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" is partition of ""]

$* = *$

[$\mathsf{x} = \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\!\mathrel{=}\! #2."]

[$* = * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" zermelo is ""]

$* \subseteq *$

[$\mathsf{x} \subseteq \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil[\mathsf{x} \subseteq \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} (s \in \mathsf{x} \Rightarrow s \in \mathsf{y})]\rceil)$]

[$\mathsf{x} \subseteq \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel{\subseteq} #2."]

[$* \subseteq * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" is subset of ""]

$\dot{\neg}\, *$

[$\dot{\neg}\, \mathsf{x} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "\dot{\neg}\, #1."]

[$\dot{\neg}\, * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "not0 ""]

$* \notin *$

[$\mathsf{x} \notin \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil[\mathsf{x} \notin \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} \dot{\neg}\, \mathsf{x} \in \mathsf{y}]\rceil)$]

[$\mathsf{x} \notin \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel{\notin} #2."]

[$* \notin * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" zermelo ~in ""]

$* \neq *$

$[\mathsf{x} \neq \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{x} \neq \mathsf{y} \ddot{=} \dot{\neg}\, \mathsf{x}{=}\mathsf{y}] \rceil)]$

[$\mathsf{x} \neq \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel{\neq} #2."]

[$* \neq * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" zermelo ˜is ""]

$* \dot{\wedge} *$

$[\mathsf{x} \dot{\wedge} \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{x} \dot{\wedge} \mathsf{y} \ddot{=} \dot{\neg}\, (\mathsf{x} \Rightarrow \dot{\neg}\, \mathsf{y})] \rceil)]$

[$\mathsf{x} \dot{\wedge} \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel{\dot{\wedge}} #2."]

[$* \dot{\wedge} * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" and0 ""]

$* \dot{\vee} *$

$[\mathsf{x} \dot{\vee} \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{x} \dot{\vee} \mathsf{y} \ddot{=} \dot{\neg}\, \mathsf{x} \Rightarrow \mathsf{y}] \rceil)]$

[$\mathsf{x} \dot{\vee} \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel{\dot{\vee}} #2."]

[$* \dot{\vee} * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" or0 ""]

$* \dot{\Leftrightarrow} *$

$[\mathsf{x} \dot{\Leftrightarrow} \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{x} \dot{\Leftrightarrow} \mathsf{y} \ddot{=} (\mathsf{x} \Rightarrow \mathsf{y}) \dot{\wedge} (\mathsf{y} \Rightarrow \mathsf{x})] \rceil)]$

[$\mathsf{x} \dot{\Leftrightarrow} \mathsf{y} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ "#1.
\mathrel{\dot{\Leftrightarrow}} #2."]

[$* \dot{\Leftrightarrow} * \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "" iff ""]

$\{ph \in * \mid *\}$

[$\{ph \in \mathsf{x} \mid \mathsf{a}\} \stackrel{\text{tex}}{\to}$ " \{ ph \mathrel{\in} #1.
\mid #2.
\}"]

[$\{ph \in * \mid *\} \stackrel{\text{pyk}}{\to}$ "the set of ph in " such that " end set"]

The pyk compiler, version 0.grue.20060417+ by *Klaus Grue*
GRD-2006-08-24.UTC:08:13:50.904458 = *MJD-53971.TAI:08:14:23.904458* = *LGT-466312406390445 8e-6*