Udvidedlse af S-reglerne, Appendix

Maja Hanne Tønnesen, Rune Christoffer Kildetoft Andresen
& Niels Peter Meyn Milthers

GRD-2006-06-29.UTC:23:36:29.550910

Contents

0.1 proof of Prop 3.7 3

1 Lemma Prop 3.10 **3**

2 Lemma Prop 3.11 **3**

[Prop 3.7a $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7b $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z}+\underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}}$]

[Prop 3.7c $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z}+\underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7d $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z}+\underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{c}} = \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{c}}$]

[Prop 3.7e $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7f $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}}$]

[Prop 3.7g $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{c}} = \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{c}} = \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{c}}$]

[Prop 3.7g′ $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{c}} = \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{c}} = \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}$]

[Prop 3.7h $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}}$]

[Prop 3.7i $\overset{\text{stmt}}{\to}$ S $\vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \neg\neg\forall_{\text{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + 0 = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow 0 = \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7j $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + 0 = \underline{\mathsf{a}}'$]

[Prop 3.7k $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z}+\underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}}' = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}' = \underline{\mathsf{b}}$]

[Prop 3.7k′ $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}}' = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}' = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}$]

[Prop 3.7l $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}'$]

[Prop 3.7l′ $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z}+\underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}' \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}$]

[Prop 3.7m $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}}'$]

[Prop 3.7o $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7p $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\neg\underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7q $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7r $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{b}}$]

[Prop 3.7s $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{b}}$]

[Prop 3.7t $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}$]

[Prop 3.7u $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + 0 = \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7u′ $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + 0 = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0$]

[Prop 3.7v $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + 0 = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + 0 = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + 0 = \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}$]

[Prop 3.7w $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + 0' = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7x $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \cdot \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7x′ $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \cdot \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}}$]

[Prop 3.7y $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \cdot \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \cdot \underline{\mathsf{a}}$]

[Prop 3.7y′ $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \neg \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \cdot \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \cdot \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}}$]

[Prop 3.7z $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = 0$]

[Prop 3.7z′ $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}$]

0.1 proof of Prop 3.7

1 Lemma Prop 3.10

[Prop 3.10a $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} = \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{z}$]

[Prop 3.10b $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} = \forall \underline{\mathsf{a}}\colon 0' \cdot \mathsf{z}$]

[Prop 3.10c $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg 0 = \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{z}$]

[Prop 3.10d $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{c}} = \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} \wedge \underline{\mathsf{b}} = \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{z} \cdot \mathsf{z} \cdot \mathsf{z}$]

[Prop 3.10e $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{a}} = \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} \cdot \mathsf{z}$]

[Prop 3.10f $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} = \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{z} \cdot \mathsf{z}$]

[Prop 3.10g $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{c}} = \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{z} \cdot \mathsf{z}$]

[Prop 3.10h $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{c}} = \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} \wedge \underline{\mathsf{a}} = \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{c}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \mathsf{z} \cdot \mathsf{z} \cdot \mathsf{z}$]

2 Lemma Prop 3.11

[Prop 3.11 $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\underline{\mathsf{c}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\underline{\mathsf{d}}\colon \neg\neg\neg\underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{c}} + \underline{\mathsf{d}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{d}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\underline{\mathsf{e}}\colon \forall_{\mathrm{obj}}\underline{\mathsf{f}}\colon \neg\underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{e}} + \underline{\mathsf{f}} \Rightarrow \neg\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \underline{\mathsf{f}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{c}} = \underline{\mathsf{e}} \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{d}} = \underline{\mathsf{f}}$]

References