Udvidelse af S-reglerne

Maja Hanne Tønnesen, Rune Christoffer Kildetoft Andresen
& Niels Peter Meyn Milthers

30. juni 2006

Indhold

1 Introduktion

Dette skriftlige projekt er lavet i forbindelse med Logik-kurset 2006[1].
Vores mål i denne opgave var at bruge Logiweb[2] til at bevise en delmængde af udsagnene[3] vedrørende læresætningerne[4] fra S-systemet, som er beskrevet i Mendelson [Men97] i kapitel 3.1. For lethedens skyld er alle nummereringer de samme som i Mendelson.
Mere præcist går opgaven ud på at bevise 3.2(j-o), bevise 3.4, bevise 3.5, tilføje aksiomet $x < y \Leftrightarrow \exists z : z \neq 0 \wedge z + x = y$, bevise 3.7, tilføje aksiomer, der definere $\neg\forall_{obj}\mathtt{z}\colon \neg\bar{\mathtt{y}} = \bar{\mathtt{x}} \cdot \mathtt{z}$, bevise 3.10 og bevise 3.11.
I afsnittene 3 til 7 er beviserne for de påviste lemmaer gennemgået. Alle trivielle hjælpelemmaer er bevist i appendix A.

2 Konklusion

Vi har ikke løst opgaven til fulde, men har dog formået at bevise 3.2j-o, 3.4, 3.5a-g. På grund af problemer med definitionen af reglen svarende til "existensial rule" side 77 i Mendelson, har vi som beskrevet i afsnit 6 ikke været i stand til at kunne bevise lemmaerne fra 3.5h og frem.
Vi har dog som beskrevet i afsnit 6.10 og 6.2.2 gennemgået hvordan beviserne for hhv. 3.5h og "existensial rule" ville have set ud, hvis problemet ikke var opstået.
Vi har endvidere kort gennemgået de definitioner, som ville være nødvendige for at kunne påvise Lemma 3.7

[1] Kursus 061004/202 Logik
[2] http://logiweb.eu
[3] Eng.: proposition
[4] Eng.: theorem

3 S-reglerne

S-systemet er en første ordens teori, som er udviklet ud fra Peanos postulater og ved hjælp mængdelære. Det skulle være passende at bruge til at bevise basis-resultaterne for tal-teori. Aksiomerne for S er følgende:

$[\mathrm{S} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathsf{x}]$

$[\mathrm{MP} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}}][\mathrm{MP} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{Gen} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \forall_{\mathrm{obj}} \underline{\mathsf{x}} \colon \underline{\mathsf{a}}][\mathrm{Gen} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{Ded} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \lambda \mathsf{x}.\mathrm{Ded}_0(\lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil, \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil) \Vdash \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}}][\mathrm{Ded} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{S2} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}}' = \underline{\mathsf{b}}'][\mathrm{S2} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{S3} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \neg 0 = \underline{\mathsf{a}}'][\mathrm{S3} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{S4} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}}' = \underline{\mathsf{b}}' \vdash \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}][\mathrm{S4} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{S5} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} + 0 = \underline{\mathsf{a}}][\mathrm{S5} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{S6} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{b}}' = \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{b}}'][\mathrm{S6} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{S7} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \cdot 0 = 0][\mathrm{S7} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{S8} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}' = \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{a}}][\mathrm{S8} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

$[\mathrm{S1} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}}][\mathrm{S1} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

Endvidere er reglen *S9*, som er grundlæggende for matematisk induktion, også en del af *S*-teorien. Denne regel kan på almindeligt sprog udtrykkes som:

> *Hvis en egenskab holder for 0 og egenskaben holder for efterfølgeren* x′ *til et naturligt tal* x*, som egenskaben gælder for, så vil egenskaben gælde for alle naturlige tal.*

I pyk er S9 defineret som:

$[\mathrm{S9} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{x}} \colon \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \langle \lceil \underline{\mathsf{b}} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil | \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil {:=} \lceil 0 \rceil \rangle \Vdash \langle \lceil \underline{\mathsf{c}} \rceil \equiv^0 \lceil \underline{\mathsf{a}} \rceil | \lceil \underline{\mathsf{x}} \rceil {:=} \lceil \underline{\mathsf{x}}' \rceil \rangle \Vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{a}}][\mathrm{S9} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

Reglen for bevis ved modsætninger er den sidste grundlæggende regel, der skal bruges i beviserne. Reglen kan på almindeligt sprog udtrykkes som følgende:

> *Hvis man ud fra en antagelse* A *kan påvise at en egenskab* B *gælder, og at man (når antagelsen stadig gælder) kan vise at den modsatte egenskab* ¬B *også gælder, så må det modsatte af antagelsen gælde, dvs.* ¬A.

I pyk er reglen defineret som:

$[\mathrm{Neg} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \vdash \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}}][\mathrm{Neg} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \text{Rule tactic}]$

4 Udsagn 3.2

Dette udsagn indeholder de grundlæggende regneregler for tal, som opfører sig som de naturlige tal. Hjælpesætningerne eller lemmaerne er generelt set en direkte konsekvens af aksiomerne.
Alle lemmaerne i dette afsnit kan udledes ud fra de tidligere nævnte og som det er bevist i både check [Gru06] og Mendelson er der for ethvert udtryk $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ følgende velformulerede sætninger[5] i systemet S:

[Prop 3.2a $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \underline{a} = \underline{a}$]

[Prop 3.2b $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{b} = \underline{a}$]

[Prop 3.2c $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{b} = \underline{c} \vdash \underline{a} = \underline{c}$]

[Prop 3.2d $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{c} \vdash \underline{b} = \underline{c} \vdash \underline{a} = \underline{b}$]

[Prop 3.2e $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c}$]

[Prop 3.2f $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \underline{a} = 0 + \underline{a}$]

[Prop 3.2g $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a}' + \underline{b} = \underline{a} + \underline{b}'$]

[Prop 3.2h $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

Da 3.2i ikke er bevist i check, (men er i Mendelson), har vi valgt for øvelsens skyld at indskrive beviset:

[Prop 3.2i $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{c} + \underline{a} = \underline{c} + \underline{b}$]

[Prop 3.2i $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash$ Prop 3.2e $\rhd \underline{a} = \underline{b} \gg \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c};$ Prop 3.2h $\gg \underline{a} + \underline{c} = \underline{c} + \underline{a};$ Prop 3.2h $\gg \underline{b} + \underline{c} = \underline{c} + \underline{b};$ S1 $\rhd \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \rhd \underline{a} + \underline{c} = \underline{c} + \underline{a} \gg \underline{b} + \underline{c} = \underline{c} + \underline{a};$ Prop 3.2b $\rhd \underline{b} + \underline{c} = \underline{c} + \underline{a} \gg \underline{c} + \underline{a} = \underline{b} + \underline{c};$ Prop 3.2c $\rhd \underline{c} + \underline{a} = \underline{b} + \underline{c} \rhd \underline{b} + \underline{c} = \underline{c} + \underline{b} \gg \underline{c} + \underline{a} = \underline{c} + \underline{b};$ Ded $\rhd \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{c} + \underline{a} = \underline{c} + \underline{b} \gg \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{c} + \underline{a} = \underline{c} + \underline{b}\rceil, p_0, c)$]

De følgende lemmaer er opskrevet, men ikke bevist i Mendelson. Disse er blandt dem som vi ønsker at bevise.

[Prop 3.2j $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$]

[Prop 3.2k $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}$]

[Prop 3.2l $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon 0 \cdot \underline{a} = 0$]

[Prop 3.2m $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a}' \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{b}$]

[5] Eng.: Wellformed formulas

$[\text{Prop 3.2n} \overset{\text{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}]$

$[\text{Prop 3.2o} \overset{\text{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \cdot \underline{b}]$

Her efter følger beviserne.

4.1 3.2j

Vi vil bevise 3.2j ved induktion efter z i B(z) : (x + y) + z = x + (y + z)
Basistilfældet er:

$[\text{Prop } 3.2\text{j}_1 \overset{\text{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} + 0 = \underline{a} + \underline{b} + 0]$

$$[\text{Prop } 3.2\text{j}_1 \overset{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \mathrm{S5} \gg \underline{a} + \underline{b} + 0 = \underline{a} + \underline{b}; \mathrm{S5} \gg \underline{b} + 0 = \underline{b}; \text{Prop 3.2i} \rhd \underline{b} + 0 = \underline{b} \gg \underline{a} + \underline{b} + 0 = \underline{a} + \underline{b}; \text{Prop 3.2d} \rhd \underline{a} + \underline{b} + 0 = \underline{a} + \underline{b} \rhd \underline{a} + \underline{b} + 0 = \underline{a} + \underline{b} \gg \underline{a} + \underline{b} + 0 = \underline{a} + \underline{b} + 0\rceil, p_0, c)]$$

Det induktive trin er:

$[\text{Prop } 3.2\text{j}_2 \overset{\text{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}']$

$$[\text{Prop } 3.2\text{j}_2 \overset{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \vdash \mathrm{S6} \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}'; \mathrm{S2} \rhd \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}'; \text{Prop 3.2c} \rhd \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' \rhd \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}'; \mathrm{S6} \gg \underline{b} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}'; \text{Prop 3.2i} \rhd \underline{b} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}'; \mathrm{S6} \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}'; \text{Prop 3.2c} \rhd \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' \rhd \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}'; \text{Prop 3.2d} \rhd \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' \rhd \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}'; \text{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \vdash \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}'\rceil, p_0, c)]$$

$[\text{Prop 3.2j} \overset{\text{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}]$

$$[\text{Prop 3.2j} \overset{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \text{Prop } 3.2\text{j}_1 \gg \overline{x} + \overline{y} + 0 = \overline{x} + \overline{y} + 0; \text{Prop } 3.2\text{j}_2 \gg \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} \Rightarrow \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}' = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}'; \mathrm{S9}\,@\,\overline{z} \rhd \overline{x} + \overline{y} + 0 = \overline{x} + \overline{y} + 0 \rhd \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} \Rightarrow \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}' = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}' \gg \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}; \text{Ded} \rhd \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z} \gg \underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}\rceil, p_0, c)]$$

4.2 3.2k

Vi vil bevise 3.2k ved induktion over z i B(z) : x = y ⇒ x · z = y · z
Basistilfældet er:

$[\text{Prop } 3.2\text{k}_1 \overset{\text{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot 0 = \underline{b} \cdot 0]$

$$[\text{Prop } 3.2\text{k}_1 \overset{\text{proof}}{\to} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \mathrm{S7} \gg \underline{a} \cdot 0 = 0; \mathrm{S7} \gg \underline{b} \cdot 0 = 0; \text{Prop 3.2a} \gg 0 = 0; \text{Prop 3.2b} \rhd \underline{b} \cdot 0 = 0 \gg 0 = \underline{b} \cdot 0; \text{Prop 3.2c} \rhd \underline{a} \cdot 0 = 0 \rhd 0 = \underline{b} \cdot 0 \gg \underline{a} \cdot 0 = \underline{b} \cdot 0; \text{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{a} \cdot 0 = \underline{b} \cdot 0 \gg \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot 0 = \underline{b} \cdot 0\rceil, p_0, c)]$$

Det induktive trin:

[Prop 3.2k_2 $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c}'$]

[Prop 3.2k_2 $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \vdash \underline{a} = \underline{b} \vdash \mathrm{MP} \rhd \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \rhd \underline{a} = \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}; \mathrm{S8} \gg \underline{a} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a}; \mathrm{S8} \gg \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b}; \mathrm{Prop\ 3.2e} \rhd \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \gg \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{a}; \mathrm{Prop\ 3.2i} \rhd \underline{a} = \underline{b} \gg \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b}; \mathrm{Prop\ 3.2c} \rhd \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{a} \rhd \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b}; \mathrm{Prop\ 3.2c} \rhd \underline{a} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a} \rhd \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b}; \mathrm{Prop\ 3.2d} \rhd \underline{a} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b} \rhd \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c}'; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \vdash \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{a} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c}' \gg \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c}' \rceil, p_0, c)$]

[Prop 3.2k $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}$]

[Prop 3.2k $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \mathrm{Prop\ 3.2k_1} \gg \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot 0 = \bar{y} \cdot 0; \mathrm{Prop\ 3.2k_2} \gg \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z} = \bar{y} \cdot \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z}' = \bar{y} \cdot \bar{z}'; \mathrm{S9} @ \bar{z} \rhd \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot 0 = \bar{y} \cdot 0 \rhd \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z} = \bar{y} \cdot \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z}' = \bar{y} \cdot \bar{z}' \gg \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z} = \bar{y} \cdot \bar{z}; \mathrm{Ded} \rhd \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{z} = \bar{y} \cdot \bar{z} \gg \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}; \mathrm{MP} \rhd \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \rhd \underline{a} = \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \rceil, p_0, c)$]

4.3 3.2l

Vi vil bevise 3.2l ved induktion over x i $B(x) : 0 \cdot x = 0$
Bemærk at basistilfældet blot er S7.
Det induktive trin:

[Prop 3.2l_2 $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon 0 \cdot \underline{a} = 0 \Rightarrow 0 \cdot \underline{a}' = 0$]

[Prop 3.2l_2 $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{a}\colon 0 \cdot \underline{a} = 0 \vdash \mathrm{S8} \gg 0 \cdot \underline{a}' = 0 \cdot \underline{a} + 0; \mathrm{S5} \gg 0 \cdot \underline{a} + 0 = 0 \cdot \underline{a}; \mathrm{Prop\ 3.2c} \rhd 0 \cdot \underline{a}' = 0 \cdot \underline{a} + 0 \rhd 0 \cdot \underline{a} + 0 = 0 \cdot \underline{a} \gg 0 \cdot \underline{a}' = 0 \cdot \underline{a}; \mathrm{Prop\ 3.2c} \rhd 0 \cdot \underline{a}' = 0 \cdot \underline{a} \rhd 0 \cdot \underline{a} = 0 \gg 0 \cdot \underline{a}' = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon 0 \cdot \underline{a} = 0 \vdash 0 \cdot \underline{a}' = 0 \gg 0 \cdot \underline{a} = 0 \Rightarrow 0 \cdot \underline{a}' = 0 \rceil, p_0, c)$]

[Prop 3.2l $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon 0 \cdot \underline{a} = 0$]

[Prop 3.2l $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \mathrm{S7} \gg 0 \cdot 0 = 0; \mathrm{Prop\ 3.2l_2} \gg 0 \cdot \bar{x} = 0 \Rightarrow 0 \cdot \bar{x}' = 0; \mathrm{S9} @ \bar{x} \rhd 0 \cdot 0 = 0 \rhd 0 \cdot \bar{x} = 0 \Rightarrow 0 \cdot \bar{x}' = 0 \gg 0 \cdot \bar{x} = 0; \mathrm{Ded} \rhd 0 \cdot \bar{x} = 0 \gg 0 \cdot \underline{a} = 0 \rceil, p_0, c)$]

4.4 3.2m

Vi vil bevise 3.2m ved induktion over y i $B(y) : x' \cdot y = x \cdot y + x$
Basistilfældet:

[Prop 3.2m_1 $\stackrel{\text{stmt}}{\to}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon \underline{a}' \cdot 0 = \underline{a} \cdot 0 + 0$]

[Prop 3.2m_1 $\stackrel{\text{proof}}{\to}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \mathrm{S7} \gg \underline{a}' \cdot 0 = 0; \mathrm{Prop\ 3.2f} \gg 0 = 0 + 0; \mathrm{S7} \gg \underline{a} \cdot 0 = 0; \mathrm{Prop\ 3.2b} \rhd \underline{a} \cdot 0 = 0 \gg 0 = \underline{a} \cdot 0; \mathrm{Prop\ 3.2e} \rhd 0 = \underline{a} \cdot 0 \gg$

$0+0=\underline{a}\cdot 0+0$; Prop 3.2c $\rhd 0=0+0 \rhd 0+0=\underline{a}\cdot 0+0 \gg 0=\underline{a}\cdot 0+0$; Prop 3.2c $\rhd \underline{a}'\cdot 0=0 \rhd 0=\underline{a}\cdot 0+0 \gg \underline{a}'\cdot 0=\underline{a}\cdot 0+0\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

Det induktive trin:

[Prop $3.2m_2 \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}'\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b} \Rightarrow \underline{a}'\cdot\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}'$]

[Prop $3.2m_2 \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}'\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b} \vdash$ S8 $\gg \underline{a}'\cdot\underline{b}'=\underline{a}'\cdot\underline{b}+\underline{a}'$; Prop 3.2e $\rhd \underline{a}'\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b} \gg \underline{a}'\cdot\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'$; S6 $\gg \underline{b}+\underline{a}'=\underline{b}+\underline{a}'$; Prop 3.2g $\gg \underline{b}'+\underline{a}=\underline{b}+\underline{a}'$; Prop 3.2d $\rhd \underline{b}+\underline{a}'=\underline{b}+\underline{a}' \rhd \underline{b}'+\underline{a}=\underline{b}+\underline{a}' \gg \underline{b}+\underline{a}'=\underline{b}'+\underline{a}$; Prop 3.2h $\gg \underline{b}'+\underline{a}=\underline{a}+\underline{b}'$; Prop 3.2c $\rhd \underline{b}+\underline{a}'=\underline{b}'+\underline{a} \rhd \underline{b}'+\underline{a}=\underline{a}+\underline{b}' \gg \underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}+\underline{b}'$; Prop 3.2i $\rhd \underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}+\underline{b}' \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}'$; Prop 3.2j $\gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}'$; Prop 3.2d $\rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}' \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}' \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}'$; S8 $\gg \underline{a}\cdot\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}$; Prop 3.2e $\rhd \underline{a}\cdot\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}'$; Prop 3.2d $\rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}' \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}+\underline{b}' \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}'$; Prop 3.2j $\gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'$; Prop 3.2c $\rhd \underline{a}'\cdot\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}' \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}' \gg \underline{a}'\cdot\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'$; Prop 3.2c $\rhd \underline{a}'\cdot\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}' \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}' \gg \underline{a}'\cdot\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}'$; Prop 3.2c $\rhd \underline{a}'\cdot\underline{b}'=\underline{a}'\cdot\underline{b}+\underline{a}' \rhd \underline{a}'\cdot\underline{b}+\underline{a}'=\underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}' \gg \underline{a}'\cdot\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}'$; Ded $\rhd \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}'\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b} \vdash \underline{a}'\cdot\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}' \gg \underline{a}'\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b} \Rightarrow \underline{a}'\cdot\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}'+\underline{b}'\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

[Prop $3.2m \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}'\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}$]

[Prop $3.2m \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon$ Prop $3.2m_1 \gg \overline{x}'\cdot 0=\overline{x}\cdot 0+0$; Prop $3.2m_2 \gg \overline{x}'\cdot\overline{y}=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{y} \Rightarrow \overline{x}'\cdot\overline{y}'=\overline{x}\cdot\overline{y}'+\overline{y}'$; S9 @ $\overline{y} \rhd \overline{x}'\cdot 0=\overline{x}\cdot 0+0 \rhd \overline{x}'\cdot\overline{y}=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{y} \Rightarrow \overline{x}'\cdot\overline{y}'=\overline{x}\cdot\overline{y}'+\overline{y}' \gg \overline{x}'\cdot\overline{y}=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{y}$; Ded $\rhd \overline{x}'\cdot\overline{y}=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{y} \gg \underline{a}'\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

4.5 3.2n

Vi vil bevise 3.2n ved induktion over y i $B(y) : x \cdot y = y \cdot x$
Basistilfældet:

[Prop $3.2n_1 \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} S \vdash \forall\underline{a}\colon \underline{a}\cdot 0=0\cdot\underline{a}$]

[Prop $3.2n_1 \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall\underline{a}\colon$ S7 $\gg \underline{a}\cdot 0=0$; Prop 3.2l $\gg 0\cdot\underline{a}=0$; Prop 3.2d $\rhd \underline{a}\cdot 0=0 \rhd 0\cdot\underline{a}=0 \gg \underline{a}\cdot 0=0\cdot\underline{a}\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

Det induktive trin:

[Prop $3.2n_2 \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a} \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}'=\underline{b}'\cdot\underline{a}$]

[Prop $3.2n_2 \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a} \vdash$ S8 $\gg \underline{a}\cdot\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}$; Prop 3.2e $\rhd \underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}=\underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a}$; Prop 3.2m $\gg \underline{b}'\cdot\underline{a}=\underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a}$; Prop 3.2b $\rhd \underline{b}'\cdot\underline{a}=\underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a} \gg \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a}=\underline{b}'\cdot\underline{a}$; Prop 3.2c $\rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}=\underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a} \rhd \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a}=\underline{b}'\cdot\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}=\underline{b}'\cdot\underline{a}$; Prop 3.2c $\rhd \underline{a}\cdot\underline{b}'=\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}=\underline{b}'\cdot\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}'=\underline{b}'\cdot\underline{a}$; Ded $\rhd \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a} \vdash \underline{a}\cdot\underline{b}'=\underline{b}'\cdot\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a} \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}'=\underline{b}'\cdot\underline{a}\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

$[\text{Prop } 3.2\text{n} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}]$

$[\text{Prop } 3.2\text{n} \stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c. \lambda x. \mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \text{Prop } 3.2\text{n}_1 \gg \bar{x} \cdot 0 = 0 \cdot \bar{x}; \text{Prop } 3.2\text{n}_2 \gg \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y}' = \bar{y}' \cdot \bar{x}; \text{S9} \mathbin{@} \bar{y} \rhd \bar{x} \cdot 0 = 0 \cdot \bar{x} \rhd \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y}' = \bar{y}' \cdot \bar{x} \gg \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}; \text{Ded} \rhd \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a} \rceil, p_0, c)]$

4.6 3.2o

$[\text{Prop } 3.2\text{o} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \cdot \underline{b}]$

$[\text{Prop } 3.2\text{o} \stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c. \lambda x. \mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \text{Prop } 3.2\text{k} \rhd \underline{a} = \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}; \text{Prop } 3.2\text{n} \gg \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot \underline{a}; \text{Prop } 3.2\text{n} \gg \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot \underline{b}; \text{Prop } 3.2\text{c} \rhd \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \rhd \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot \underline{b}; \text{S1} \rhd \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot \underline{a} \rhd \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{c} \cdot \underline{b} \gg \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \cdot \underline{b}; \text{Ded} \rhd \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \cdot \underline{b} \gg \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \cdot \underline{b}; \text{MP} \rhd \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \cdot \underline{b} \rhd \underline{a} = \underline{b} \gg \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{c} \cdot \underline{b} \rceil, p_0, c)]$

5 Udsagn 3.4

De følgende udsagn er en udvidelse af egenskaberne ved addition og multiplikation.

$[\text{Prop } 3.4\text{a} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}]$

$[\text{Prop } 3.4\text{b} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{b} + \underline{c} \cdot \underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{a} + \underline{c} \cdot \underline{a}]$

$[\text{Prop } 3.4\text{c} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}]$

$[\text{Prop } 3.4\text{d} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b}]$

5.1 3.4a

Vi vil bevise 3.4a ved induktion over z i $B(z) : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
Basistilfældet:

$[\text{Prop } 3.4\text{a}_1 \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot 0]$

$[\text{Prop } 3.4\text{a}_1 \stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c. \lambda x. \mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \text{S5} \gg \underline{b} + 0 = \underline{b}; \text{Prop } 3.2\text{o} \rhd \underline{b} + 0 = \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 = \underline{a} \cdot \underline{b}; \text{S5} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 = \underline{a} \cdot \underline{b}; \text{Prop } 3.2\text{d} \rhd \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 = \underline{a} \cdot \underline{b} \rhd \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 = \underline{a} \cdot \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 = \underline{a} \cdot \underline{b} + 0; \text{S7} \gg \underline{a} \cdot 0 = 0; \text{Prop } 3.2\text{i} \rhd \underline{a} \cdot 0 = 0 \gg \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot 0 = \underline{a} \cdot \underline{b} + 0; \text{Prop } 3.2\text{d} \rhd \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 = \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 \rhd \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot 0 = \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 \gg \underline{a} \cdot \underline{b} + 0 = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot 0 \rceil, p_0, c)]$

Det induktive trin:

$[\text{Prop } 3.4\text{a}_2 \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}']$

$[\text{Prop } 3.4\text{a}_2 \stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c. \lambda x. \mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c} \vdash \text{S6} \gg \underline{b} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}'; \text{Prop } 3.2\text{o} \rhd \underline{b} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c}'; \text{S8} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{c}' =$

$\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}+\underline{a}$; Prop 3.2e $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}+\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a}$; Prop 3.2j $\gg$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a}$; Prop 3.2c $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}+\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a} =$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}+\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a}$; S8 $\gg \underline{a}\cdot\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a}$; Prop 3.2i $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{c}' =$ $\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a}$; Prop 3.2d $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}+\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}' =$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}+\underline{a} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}'$; Prop 3.2c $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}+\underline{a} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}+\underline{a} =$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}' \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}'$; Prop 3.2c $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}' \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}' =$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}' \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}'$; Ded $\rhd\, \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{c}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} \vdash$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}' \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}'\rceil, p_0, c)]$

[Prop 3.4a $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{c}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}$]

[Prop 3.4a $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{c}\colon$ Prop $3.4a_1 \gg \overline{x}\cdot\overline{y}+0 =$ $\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot 0$; Prop $3.4a_2 \gg \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{z} = \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{z} \Rightarrow \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{z}' =$ $\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{z}'$; S9 @ $\overline{z} \rhd \overline{x}\cdot\overline{y}+0 = \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot 0 \rhd \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{z} = \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{z} \Rightarrow \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{z}' = \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{z}' \gg$ $\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{z} = \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{z}$; Ded $\rhd\, \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{z} = \overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\overline{z} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}\rceil, p_0, c)]$

5.2 3.4b

[Prop 3.4b $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{c}\colon \underline{b}+\underline{c}\cdot\underline{a} = \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{c}\cdot\underline{a}$]

[Prop 3.4b $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{c}\colon$ Prop 3.4a $\gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} =$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}$; Prop 3.2n $\gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} = \underline{b}+\underline{c}\cdot\underline{a}$; Prop 3.2n $\gg \underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$; Prop 3.2n $\gg$ $\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{c}\cdot\underline{a}$; S1 $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} = \underline{b}+\underline{c}\cdot\underline{a} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} \gg \underline{b}+\underline{c}\cdot\underline{a} =$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c}$; Prop 3.2e $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a}\cdot\underline{c}$; Prop 3.2i $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{c} =$ $\underline{c}\cdot\underline{a} \gg \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{c}\cdot\underline{a}$; Prop 3.2c $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a}\cdot\underline{c} \rhd \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{a}\cdot\underline{c} =$ $\underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{c}\cdot\underline{a} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{c}\cdot\underline{a}$; Prop 3.2c $\rhd\, \underline{b}+\underline{c}\cdot\underline{a} =$ $\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{c} = \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{c}\cdot\underline{a} \gg \underline{b}+\underline{c}\cdot\underline{a} = \underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{c}\cdot\underline{a}\rceil, p_0, c)]$

5.3 3.4c

Vi vil bevise 3.4c ved induktion over z i $B(z) : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Basistilfældet:

[Prop $3.4c_1$ $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0 = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0$]

[Prop $3.4c_1$ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon$ S7 $\gg \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0 = 0$; S7 $\gg \underline{b}\cdot 0 =$ 0; Prop 3.2o $\rhd\, \underline{b}\cdot 0 = 0 \gg \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0 = \underline{a}\cdot 0$; S7 $\gg \underline{a}\cdot 0 = 0$; Prop 3.2c $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0 = \underline{a}\cdot 0 \rhd \underline{a}\cdot 0 =$ $0 \gg \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0 = 0$; Prop 3.2d $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0 = 0 \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0 = 0 \gg \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0 = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot 0\rceil, p_0, c)]$

Det induktive trin:

[Prop $3.4c_2$ $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{c}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}'$]

[Prop $3.4c_2$ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{c}\colon \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{c}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} \vdash$ S8 $\gg$ $\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b}$; Prop 3.2e $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b} =$ $\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b}$; Prop 3.2c $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b} \gg$ $\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}' = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b}$; Prop 3.4a $\gg \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{b} = \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b}$; Prop 3.2d $\rhd\, \underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}' =$

$\underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{a} \cdot \underline{b} \rhd \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{a} \cdot \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b}; \mathrm{S8} \gg \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b}; \mathrm{Prop\ 3.2o} \rhd \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b}; \mathrm{Prop\ 3.2d} \rhd \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b} \rhd \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} + \underline{b} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}'; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} \vdash \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' \gg \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}' \rceil, p_0, c)]$

$[\mathrm{Prop\ 3.4c} \overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}]$

$[\mathrm{Prop\ 3.4c} \overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \mathrm{Prop\ 3.4c_1} \gg \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot 0 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot 0; \mathrm{Prop\ 3.4c_2} \gg \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}' = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}'; \mathrm{S9} \mathbin{@} \bar{z} \rhd \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot 0 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot 0 \rhd \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}' = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}' \gg \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}; \mathrm{Ded} \rhd \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \gg \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{c} \rceil, p_0, c)]$

5.4 3.4d

Vi vil bevise 3.4d ved induktion over z i $B(z) : x + z = y + z \Rightarrow x = y$
Basistilfældet er:

$[\mathrm{Prop\ 3.4d_1} \overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a} + 0 = \underline{b} + 0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{b}]$

$[\mathrm{Prop\ 3.4d_1} \overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a} + 0 = \underline{b} + 0 \vdash \mathrm{S5} \gg \underline{a} + 0 = \underline{a}; \mathrm{S5} \gg \underline{b} + 0 = \underline{b}; \mathrm{S1} \rhd \underline{a} + 0 = \underline{a} \rhd \underline{a} + 0 = \underline{b} + 0 \gg \underline{a} = \underline{b} + 0; \mathrm{Prop\ 3.2c} \rhd \underline{a} = \underline{b} + 0 \rhd \underline{b} + 0 = \underline{b} \gg \underline{a} = \underline{b}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \underline{a} + 0 = \underline{b} + 0 \vdash \underline{a} = \underline{b} \gg \underline{a} + 0 = \underline{b} + 0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \rceil, p_0, c)]$

Det induktive trin:

$[\mathrm{Prop\ 3.4d_2} \overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \Rightarrow \underline{a} = \underline{b}]$

$[\mathrm{Prop\ 3.4d_2} \overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \vdash \mathrm{S6} \gg \underline{a} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{c}'; \mathrm{S6} \gg \underline{b} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}'; \mathrm{S1} \rhd \underline{a} + \underline{c}' = \underline{a} + \underline{c}' \rhd \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}'; \mathrm{Prop\ 3.2c} \rhd \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \rhd \underline{b} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}'; \mathrm{S4} \rhd \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \gg \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c}; \mathrm{MP} \rhd \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \rhd \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \gg \underline{a} = \underline{b}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \vdash \underline{a} = \underline{b} \gg \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} + \underline{c}' = \underline{b} + \underline{c}' \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \rceil, p_0, c)]$

$[\mathrm{Prop\ 3.4d} \overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b}]$

$[\mathrm{Prop\ 3.4d} \overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \mathrm{Prop\ 3.4d_1} \gg \bar{x} + 0 = \bar{y} + 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}; \mathrm{Prop\ 3.4d_2} \gg \bar{x} + \bar{z} = \bar{y} + \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} + \bar{z}' = \bar{y} + \bar{z}' \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}; \mathrm{S9} \mathbin{@} \bar{z} \rhd \bar{x} + 0 = \bar{y} + 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \rhd \bar{x} + \bar{z} = \bar{y} + \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{x} + \bar{z}' = \bar{y} + \bar{z}' \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \gg \bar{x} + \bar{z} = \bar{y} + \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}; \mathrm{Ded} \rhd \bar{x} + \bar{z} = \bar{y} + \bar{z} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \gg \underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b} \rceil, p_0, c)]$

6 Udsagn 3.5

I denne del har vi kun kunne løse indtil h, da denne og de efterfølgende kræver reglen “existensial rule”. Dog er der i afsnit 6.2.2 genemgået hvilket problem, der forhindrer os i at bevise ” existencial rule”, og hvordan vi ville have bevist

reglen, hvis problemet ikke var opstået. Endvidere er der i 6.10 genemgået hvordan vi ville have løst 3.5h.
I de følgende udsagn indgår numeraler, der opfører sig som de naturlige tal og er defineret i forhold til 0 på følgende måde:

$$\begin{array}{lcl} 0 & = & \overline{0} \\ 0' & = & \overline{1} \\ 0'' & = & \overline{2} \\ \vdots & & \vdots \\ 0^{n*'} & = & \overline{n} \end{array}$$

Dvs. hvis $\overline{0}$ er et numeral, og hvis $\overline{\mathrm{n}}$ er et numeral, så er $\overline{\mathrm{n}}'$ også.
I afsnit 6.3 til 6.10 er beviserne for følgende lemmaer (indtil h).

[Prop 3.5a $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \underline{a} + 0' = \underline{a}'$]

[Prop 3.5b $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \underline{a} \cdot 0' = \underline{a}$]

[Prop 3.5c $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} + \underline{a}$]

[Prop 3.5d $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b} = 0$]

[Prop 3.5e $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0$]

[Prop 3.5f $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b} = 0' \Rightarrow \neg \underline{a} = 0' \Rightarrow \neg \underline{b} = 0$]

[Prop 3.5g $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} \cdot \underline{b} = 0' \Rightarrow \neg \underline{a} = 0' \Rightarrow \neg \underline{b} = 0'$]

[Prop 3.5h $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \forall_{\mathrm{obj}} \underline{b}\colon \neg \underline{a} = \underline{b}'$]

[Prop 3.5i $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \neg \underline{c} = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{b}$]

[Prop 3.5j $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0' \Rightarrow \neg \forall_{\mathrm{obj}} \underline{b}\colon \neg \underline{a} = \underline{b}''$]

Efterfølgende vil vi gennemgåde nødvendige hjælpesætninger og definitioner for at kunne bevise 3.5a-3.5g.

6.1 Definitioner i forbindelse med ∧ og ∨

Fra 3.5d bruges ∧ og ∨, som begge er makrodefinerede udtryk:

[$\mathsf{x} \wedge \mathsf{y} \overset{\text{macro}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{x} \wedge \mathsf{y} \stackrel{..}{=} \neg(\mathsf{x} \Rightarrow \neg \mathsf{y})] \rceil)$]

[$\mathsf{x} \vee \mathsf{y} \overset{\text{macro}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{t}.\lambda \mathsf{s}.\lambda \mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t}, \mathsf{s}, \mathsf{c}, \lceil [\mathsf{x} \vee \mathsf{y} \stackrel{..}{=} (\neg \mathsf{x}) \Rightarrow \mathsf{y}] \rceil)$]

Endvidere er det klart at reglerne for introduktion og eliminering af hhv. ∧ og ∨ dermed også skal bruges. Alle disse er bevist i de følgende afsnit.

6.1.1 Introduktion af $\wedge$

$[\mathrm{Con} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Con} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{Repetition} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Lem1.11b} \gg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MT} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

6.1.2 Elimination af $\wedge$ 1

$[\mathrm{Con1} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{Con1} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \vdash \mathrm{A1}' \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Lem1.11d} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MP} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MT} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Lem1.11a} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

6.1.3 Elimination af $\wedge$ 2

$[\mathrm{Con2} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Con2} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{A1}' \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MT} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Lem1.11a} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MP} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

6.1.4 Introduktion af $\vee$ 1

$[\mathrm{Dis1} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Dis1} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \mathrm{Lem1.11c} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Lem1.11b} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

6.1.5 Introduktion af $\vee$ 2

$[\mathrm{Dis2} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Dis2} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{A1}' \gg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

6.1.6 Elimination af $\vee$

Da vi ikke har haft brug for at fjerne $\vee$, har vi ikke bevist denne regel.

6.2 Andre hjælpesætninger

Vi har til beviset af 3.5a-3.5g haft brug for nogle af reglerne fra [Gru06], dog med `imply` istedet for `infer`. Sådanne regler er navngivet med <oprindelige navn>' og beviserne for disse kan ses i Appendix A.

6.2.1 $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$

En ny hjælperegel er **regel** H3, som skal bruges i forbindelse med $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ for at kunne konkludere sammenhænge i mellem $(x = y) \wedge (x \neq 3) \Rightarrow (y \neq 3)$.

$[\mathrm{H3} \overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{a} \vdash \neg \underline{c} \vdash \neg \underline{b}]$

$[\mathrm{H3} \overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{b} \colon \forall \underline{c} \colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{a} \vdash \neg \underline{c} \vdash \mathrm{MP} \rhd \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \rhd \underline{a} \gg \underline{b} \Rightarrow \underline{c}; \mathrm{MT} \rhd \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \rhd \neg \underline{c} \gg \neg \underline{b} \rceil, \mathrm{p}_0, c)]$

6.2.2 $\exists$ x

Selv om vi ikke har nået at implementere fra opgave 3.5h, hvor der gøres brug af $\exists$, har vi alligevel makrodefineret kvantoren som følger.
$[\exists x \colon y \overset{\text{macro}}{\rightarrow} \lambda t.\lambda s.\lambda c.\tilde{\mathcal{M}}_4(t, s, c, \lceil [\exists x \colon y \doteq \neg(\forall x \colon \neg y)] \rceil)]$
Vores problem har været, at vi ikke har kunne udtrykke *"$\mathcal{B}(x, t)$, hvor t kan indsættes i stedet for x'erne uden at blive bundet til en alkvantor"*, i pyk.
Beviset for hjælpesætningen, der indfører eksistenskvantoren, ville dog have været opbygget nogenlunde som følger.
Følgende tautologi,

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

antages vist nogenlunde som Modus Tollens, dog med variation.
Ved axiom A4′ kan vi få instansen:

$$(\forall x)\neg\mathcal{A}(x, t) \Rightarrow \neg A(t, t)$$

Idet man kan få følgende instans af tautologien:

$$\big((\forall x)\neg\mathcal{A}(x, t) \Rightarrow \neg A(t, t)\big) \Rightarrow \big(A(t, t) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg\mathcal{A}(x, t)\big)$$

kan man vha. MP på tautologi-instansen og aksiom-instansen få:

$$\big(A(t, t) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg\mathcal{A}(x, t)\big)$$

og pga. af makrodefinitionen er denne nu vist.
Herefter vises Lemmaerne 3.5a-3.5g

6.3 3.5a

Dette lemma beviser, at hvis man lægger $0'$ til et tal, får man efterølgeren til tallet.

$[\text{Prop 3.5a} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \text{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \underline{a} + 0' = \underline{a}']$

$[\text{Prop 3.5a} \stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \text{S6} \gg \underline{a} + 0' = \underline{a} + 0'; \text{S5} \gg \underline{a} + 0 = \underline{a}; \text{S2} \rhd \underline{a} + 0 = \underline{a} \gg \underline{a} + 0' = \underline{a}'; \text{Prop 3.2c} \rhd \underline{a} + 0' = \underline{a} + 0' \rhd \underline{a} + 0' = \underline{a}' \gg \underline{a} + 0' = \underline{a}'; \text{Prop 3.2a} \gg \underline{a} + 0' = \underline{a} + 0'; \text{S1} \rhd \underline{a} + 0' = \underline{a} + 0' \rhd \underline{a} + 0' = \underline{a}' \gg \underline{a} + 0' = \underline{a}' \rceil, p_0, c)]$

6.4 3.5b

Her beviser vi at $0'$ er neutralt element med hensyn til multiplikation.

$[\text{Prop 3.5b} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \text{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \underline{a} \cdot 0' = \underline{a}]$

$[\text{Prop 3.5b} \stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \text{S8} \gg \underline{a} \cdot 0' = \underline{a} \cdot 0 + \underline{a}; \text{S7} \gg \underline{a} \cdot 0 = 0; \text{Prop 3.2e} \rhd \underline{a} \cdot 0 = 0 \gg \underline{a} \cdot 0 + \underline{a} = 0 + \underline{a}; \text{Prop 3.2c} \rhd \underline{a} \cdot 0' = \underline{a} \cdot 0 + \underline{a} \rhd \underline{a} \cdot 0 + \underline{a} = 0 + \underline{a} \gg \underline{a} \cdot 0' = 0 + \underline{a}; \text{Prop 3.2f} \gg \underline{a} = 0 + \underline{a}; \text{Prop 3.2b} \rhd \underline{a} = 0 + \underline{a} \gg 0 + \underline{a} = \underline{a}; \text{Prop 3.2c} \rhd \underline{a} \cdot 0' = 0 + \underline{a} \rhd 0 + \underline{a} = \underline{a} \gg \underline{a} \cdot 0' = \underline{a}; \text{Prop 3.2a} \gg \underline{a} \cdot 0' = \underline{a} \cdot 0'; \text{S1} \rhd \underline{a} \cdot 0' = \underline{a} \cdot 0' \rhd \underline{a} \cdot 0' = \underline{a} \gg \underline{a} \cdot 0' = \underline{a} \rceil, p_0, c)]$

6.5 3.5c

$[\text{Prop 3.5c} \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \text{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} + \underline{a}]$

$[\text{Prop 3.5c} \stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \text{S8} \gg \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} \cdot 0' + \underline{a}; \text{Prop 3.5b} \gg \underline{a} \cdot 0' = \underline{a}; \text{Prop 3.2e} \rhd \underline{a} \cdot 0' = \underline{a} \gg \underline{a} \cdot 0' + \underline{a} = \underline{a} + \underline{a}; \text{Prop 3.2c} \rhd \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} \cdot 0' + \underline{a} \rhd \underline{a} \cdot 0' + \underline{a} = \underline{a} + \underline{a} \gg \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} + \underline{a}; \text{Prop 3.2a} \gg \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} \cdot 0''; \text{S1} \rhd \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} \cdot 0'' \rhd \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} + \underline{a} \gg \underline{a} \cdot 0'' = \underline{a} + \underline{a} \rceil, p_0, c)]$

6.6 3.5d

Her beviser vi, at hvis en sum er 0, er begge addender i summen 0, da der ikke findes negative tal i systemet.
Beviset er ved induktion over y i $B(y) : x + y \Rightarrow (x = 0) \wedge (y = 0)$
Basistilfældet:

$[\text{Prop 3.5d}_1 \stackrel{\text{stmt}}{\rightarrow} \text{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \underline{a} + 0 = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0]$

$[\text{Prop 3.5d}_1 \stackrel{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \text{S} \vdash \forall \underline{a} \colon \forall \underline{a} \colon \underline{a} + 0 = 0 \vdash \text{S5} \gg \underline{a} + 0 = \underline{a}; \text{S1} \rhd \underline{a} + 0 = \underline{a} \rhd \underline{a} + 0 = 0 \gg \underline{a} = 0; \text{Prop 3.2a} \gg 0 = 0; \text{Con} \rhd \underline{a} = 0 \rhd 0 = 0 \gg \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0; \text{Ded} \rhd \forall \underline{a} \colon \underline{a} + 0 = 0 \vdash \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0 \gg \underline{a} + 0 = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0 \rceil, p_0, c)]$

Det induktive trin:

[Prop 3.5d$_2$ $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0$]

[Prop 3.5d$_2$ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b} = 0 \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b}' = 0 \vdash \mathrm{S3} \gg \neg 0 = \underline{a} + \underline{b}'; \mathrm{Prop3.2b}' \gg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow 0 = \underline{a} + \underline{b}'; \mathrm{Lem1.11e} \gg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow 0 = \underline{a} + \underline{b}' \Rightarrow \neg 0 = \underline{a} + \underline{b}' \Rightarrow \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0; \mathrm{MP} \rhd \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow 0 = \underline{a} + \underline{b}' \Rightarrow \neg 0 = \underline{a} + \underline{b}' \Rightarrow \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \rhd \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow 0 = \underline{a} + \underline{b}' \gg \neg 0 = \underline{a} + \underline{b}' \Rightarrow \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0; \mathrm{MP} \rhd \neg 0 = \underline{a} + \underline{b}' \Rightarrow \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \rhd \neg 0 = \underline{a} + \underline{b}' \gg \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0; \mathrm{S6} \gg \underline{a} + \underline{b}' = \underline{a} + \underline{b}'; \mathrm{S1}'' \gg \underline{a} + \underline{b}' = \underline{a} + \underline{b}' \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0; \mathrm{H3} \rhd \underline{a} + \underline{b}' = \underline{a} + \underline{b}' \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0 \rhd \underline{a} + \underline{b}' = \underline{a} + \underline{b}' \rhd \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \gg \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0; \mathrm{Lem1.11c} \gg \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0 \rhd \neg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \gg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0; \mathrm{MP} \rhd \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0 \rhd \underline{a} + \underline{b}' = 0 \gg \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b}' = 0 \vdash \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0 \gg \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b} = 0 \vdash \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0 \gg \underline{a} + \underline{b} = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0 \rceil, p_0, c)$]

[Prop 3.5d $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b} = 0$]

[Prop 3.5d $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \text{Prop 3.5d}_1 \gg \bar{x} + 0 = 0 \Rightarrow \neg \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0; \text{Prop 3.5d}_2 \gg \bar{x} + \bar{y} = 0 \Rightarrow \neg \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} + \bar{y}' = 0 \Rightarrow \neg \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg \bar{y}' = 0; \mathrm{S9} @ \bar{y} \rhd \bar{x} + 0 = 0 \Rightarrow \neg \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0 \rhd \bar{x} + \bar{y} = 0 \Rightarrow \neg \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} + \bar{y}' = 0 \Rightarrow \neg \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg \bar{y}' = 0 \gg \bar{x} + \bar{y} = 0 \Rightarrow \neg \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg \bar{y} = 0; \mathrm{Ded} \rhd \bar{x} + \bar{y} = 0 \Rightarrow \neg \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg \bar{y} = 0 \gg \underline{a} + \underline{b} = 0 \Rightarrow \neg \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b} = 0 \rceil, p_0, c)$]

6.7 3.5e

Her beviser vi at hvis en faktor i et produkt ikke er 0 og produktet er 0, så er den anden faktor 0. Beviset er ved induktion over x i
$Bx : x \neq 0 \Rightarrow (y \cdot x = 0 \Rightarrow y = 0)$.
Basistilfældet:

[Prop 3.5e$_1$ $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon \neg 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0$]

[Prop 3.5e$_1$ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{a}\colon \neg 0 = 0 \vdash \text{Prop 3.2a} \gg 0 = 0; \mathrm{Lem1.11c} \gg \neg 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0; \mathrm{MP} \rhd \neg 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \rhd \neg 0 = 0 \gg 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0; \mathrm{MP} \rhd 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \rhd 0 = 0 \gg \underline{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{a}\colon \neg 0 = 0 \vdash \underline{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \gg \neg 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \rceil, p_0, c)$]

Det induktive trin:

[Prop 3.5e$_2$ $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow}$ $S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg \underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0$]

[Prop 3.5e$_2$ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow}$ $\lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil S \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg \underline{b}' = 0 \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \underline{a} \cdot \underline{b}' = 0 \vdash \mathrm{S8} \gg \underline{a} \cdot \underline{b}' = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a}; \mathrm{S1} \rhd \underline{a} \cdot \underline{b}' =$

$\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}' = 0 \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a} = 0; \mathrm{Prop\ 3.5d} \gg \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \neg\underline{a} = 0; \mathrm{MP} \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \neg\underline{a} = 0 \rhd \underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{a} = 0 \gg \neg\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \neg\underline{a} = 0; \mathrm{Con2} \rhd \neg\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \neg\underline{a} = 0 \gg \underline{a} = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}\cdot\underline{b}' = 0 \vdash \underline{a} = 0 \gg \underline{a}\cdot\underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \neg\underline{b}' = 0 \vdash \underline{a}\cdot\underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \gg \neg\underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \neg\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \vdash \neg\underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \gg \neg\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}' = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{Prop\ 3.5e} \overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \neg\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0]$

$[\mathrm{Prop\ 3.5e} \overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \mathrm{Prop\ 3.5e_1} \gg \neg 0 = 0 \Rightarrow \bar{x}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0; \mathrm{Prop\ 3.5e_2} \gg \neg\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg\bar{y}' = 0 \Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y}' = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0; \mathrm{S9} @ \bar{y} \rhd \neg 0 = 0 \Rightarrow \bar{x}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \rhd \neg\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \Rightarrow \neg\bar{y}' = 0 \Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y}' = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \gg \neg\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0; \mathrm{Ded} \rhd \neg\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \gg \neg\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} = 0\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

6.8 3.5f

Her beviser vi, at hvis en sum er $0'$, er netop 1 af addenderne $0'$ og den anden er 0. Bevist er ved induktion over y i
$B(y) : x + y = 1 \Rightarrow (x = 0 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge y = 0)$
Basistilfældet.

$[\mathrm{Prop\ 3.5f_1} \overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall\underline{a}\colon \underline{a} + 0 = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0]$

$[\mathrm{Prop\ 3.5f_1} \overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{a}\colon \underline{a} + 0 = 0' \vdash \mathrm{S5} \gg \underline{a} + 0 = \underline{a}; \mathrm{S1} \rhd \underline{a} + 0 = \underline{a} \rhd \underline{a} + 0 = 0' \gg \underline{a} = 0'; \mathrm{Prop\ 3.2a} \gg 0 = 0; \mathrm{Con} \rhd \underline{a} = 0' \rhd 0 = 0 \gg \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0; \mathrm{Dis2} \rhd \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0 \gg \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{a}\colon \underline{a} + 0 = 0' \vdash \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0 \gg \underline{a} + 0 = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

Det induktive trin:

$[\mathrm{Prop\ 3.5f_2} \overset{\mathrm{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0]$

$[\mathrm{Prop\ 3.5f_2} \overset{\mathrm{proof}}{\rightarrow} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b} = 0 \vdash \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a}+\underline{b}' = 0' \vdash \mathrm{S6} \gg \underline{a}+\underline{b}' = \underline{a}+\underline{b}'; \mathrm{S1} \rhd \underline{a}+\underline{b}' = \underline{a}+\underline{b}' \rhd \underline{a}+\underline{b}' = 0' \gg \underline{a}+\underline{b}' = 0'; \mathrm{S4} \rhd \underline{a}+\underline{b}' = 0' \gg \underline{a}+\underline{b} = 0; \mathrm{Prop\ 3.5d} \gg \underline{a}+\underline{b} = 0 \Rightarrow \neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0; \mathrm{MP} \rhd \underline{a}+\underline{b} = 0 \Rightarrow \neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0 \rhd \underline{a}+\underline{b} = 0 \gg \neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0; \mathrm{Con1} \rhd \neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0 \gg \underline{a} = 0; \mathrm{Con2} \rhd \neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0 \gg \underline{b} = 0; \mathrm{S2} \rhd \underline{b} = 0 \gg \underline{b}' = 0'; \mathrm{Con} \rhd \underline{a} = 0 \rhd \underline{b}' = 0' \gg \neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0'; \mathrm{Dis1} \rhd \neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0' \gg \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b}' = 0' \vdash \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0 \gg \underline{a} + \underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0; \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{a}\colon \forall\underline{b}\colon \underline{a} + \underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b} = 0 \vdash \underline{a} + \underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0 \gg \underline{a} + \underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b} = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{a} = 0 \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0' \Rightarrow \neg\underline{a} = 0' \Rightarrow \neg\underline{b}' = 0\rceil, p_0, \mathsf{c})]$

[Prop 3.5f $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} = 0$]

[Prop 3.5f $\overset{\text{proof}}{\to}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \text{Prop } 3.5\text{f}_1 \gg \bar{\mathsf{x}} + 0 = 0' \Rightarrow \neg\neg\bar{\mathsf{x}} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0; \text{Prop } 3.5\text{f}_2 \gg \bar{\mathsf{x}} + \bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\neg\bar{\mathsf{x}} = 0 \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0 \Rightarrow \bar{\mathsf{x}} + \bar{\mathsf{y}}' = 0' \Rightarrow \neg\neg\bar{\mathsf{x}} = 0 \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}}' = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}}' = 0; \mathrm{S9} \mathbin{@} \bar{\mathsf{y}} \rhd \bar{\mathsf{x}} + 0 = 0' \Rightarrow \neg\neg\bar{\mathsf{x}} = 0 \Rightarrow \neg 0 = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0 \rhd \bar{\mathsf{x}} + \bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\neg\bar{\mathsf{x}} = 0 \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0 \Rightarrow \bar{\mathsf{x}} + \bar{\mathsf{y}}' = 0' \Rightarrow \neg\neg\bar{\mathsf{x}} = 0 \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}}' = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}}' = 0 \gg \bar{\mathsf{x}} + \bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\neg\bar{\mathsf{x}} = 0 \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0; \text{Ded} \rhd \bar{\mathsf{x}} + \bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\neg\bar{\mathsf{x}} = 0 \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0 \gg \underline{\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

6.9 3.5g

Her viser vi, at hvis et produkt er $0'$ er begge faktore $0'$. Beviset er ved induktion over y i $\mathrm{B(y)} : \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \bar{1} \Rightarrow (\mathrm{x} = \bar{1}) \wedge (\mathrm{y} = \bar{1})$.
Basistilfældet:

[Prop 3.5g_1 $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0'$]

[Prop 3.5g_1 $\overset{\text{proof}}{\to}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot 0 = 0' \vdash \mathrm{S7} \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot 0 = 0; \mathrm{S1} \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot 0 = 0 \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot 0 = 0' \gg 0 = 0'; \mathrm{S3} \gg \neg 0 = 0'; \text{Lem1.11c} \gg \neg 0 = 0' \Rightarrow 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0'; \text{MP} \rhd \neg 0 = 0' \Rightarrow 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0' \rhd \neg 0 = 0' \gg 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0'; \text{MP} \rhd 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0' \rhd 0 = 0' \gg \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0'; \text{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot 0 = 0' \vdash \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0' \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0'\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[Prop 3.5g_2 $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'$]

[Prop 3.5g_2 $\overset{\text{proof}}{\to}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \vdash \text{Con2} \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \gg \underline{\mathsf{a}} = 0'; \text{Con1} \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0; \mathrm{S3} \gg \neg 0 = 0'; \mathrm{H10} \rhd \neg 0 = 0' \gg \neg 0' = 0; \mathrm{S1}'' \gg \underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow 0' = 0; \mathrm{H3} \rhd \underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow 0' = 0 \rhd \underline{\mathsf{a}} = 0' \rhd \neg 0' = 0 \gg \neg\underline{\mathsf{a}} = 0; \text{Prop } 3.2\text{n} \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{S1} \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \gg \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = 0; \text{Prop } 3.5\text{e} \gg \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = 0; \text{MP} \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = 0 \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \gg \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = 0; \text{MP} \rhd \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = 0 \rhd \underline{\mathsf{b}} \cdot \underline{\mathsf{a}} = 0 \gg \underline{\mathsf{b}} = 0; \mathrm{S2} \rhd \underline{\mathsf{b}} = 0 \gg \underline{\mathsf{b}}' = 0'; \text{Con} \rhd \underline{\mathsf{a}} = 0' \rhd \underline{\mathsf{b}}' = 0' \gg \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'; \text{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \vdash \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \gg \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'\rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})$]

[Prop 3.5g_3 $\overset{\text{stmt}}{\to}$ $\mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \vdash \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'$]

[Prop 3.5g_3 $\overset{\text{proof}}{\to}$ $\lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \vdash \forall \underline{\mathsf{a}}\colon \forall \underline{\mathsf{b}}\colon \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \vdash \text{Con1} \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0'; \text{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \gg \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0'; \text{Con1} \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \gg \underline{\mathsf{a}} = 0'; \text{Con2} \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \gg \underline{\mathsf{a}} =$

$0; \mathrm{S1} \rhd \underline{\mathsf{a}} = 0 \rhd \underline{\mathsf{a}} = 0' \gg 0 = 0'; \mathrm{S3} \gg \neg 0 = 0'; \mathrm{Lem1.11c} \gg \neg 0 = 0' \Rightarrow 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'; \mathrm{MP} \rhd \neg 0 = 0' \Rightarrow 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \rhd \neg 0 = 0' \gg 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'; \mathrm{MP} \rhd 0 = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \rhd 0 = 0' \gg \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'; \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{\mathsf{a}} \colon \forall\underline{\mathsf{b}} \colon \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \vdash \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \gg \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

Det induktive trin:

$[\mathrm{Prop\ 3.5g_4} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall\underline{\mathsf{a}} \colon \forall\underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}' = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0']$

$[\mathrm{Prop\ 3.5g_4} \stackrel{\mathrm{proof}}{\to} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall\underline{\mathsf{a}} \colon \forall\underline{\mathsf{b}} \colon \forall\underline{\mathsf{a}} \colon \forall\underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \vdash \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}' = 0' \vdash \mathrm{S8} \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}' = \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{S1} \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}' = \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}' = 0' \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{a}} = 0'; \mathrm{Prop\ 3.5f} \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} + \underline{\mathsf{a}} = 0' \gg \neg\neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0; \mathrm{Prop\ 3.5g_2} \gg \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'; \mathrm{Prop\ 3.5g_3} \rhd \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \gg \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'; \mathrm{H11} \rhd \neg\neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \rhd \neg\underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \gg \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0'; \mathrm{Ded} \rhd \forall\underline{\mathsf{a}} \colon \forall\underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \vdash \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}' = 0' \vdash \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}}' = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}}' = 0' \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{Prop\ 3.5g} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall\underline{\mathsf{a}} \colon \forall\underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0']$

$[\mathrm{Prop\ 3.5g} \stackrel{\mathrm{proof}}{\to} \lambda\mathsf{c}.\lambda\mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall\underline{\mathsf{a}} \colon \forall\underline{\mathsf{b}} \colon \mathrm{Prop\ 3.5g_1} \gg \bar{\mathsf{x}} \cdot 0 = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0'; \mathrm{Prop\ 3.5g_4} \gg \bar{\mathsf{x}} \cdot \bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \bar{\mathsf{x}} \cdot \bar{\mathsf{y}}' = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}}' = 0'; \mathrm{S9} @ \bar{\mathsf{y}} \rhd \bar{\mathsf{x}} \cdot 0 = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg 0 = 0' \rhd \bar{\mathsf{x}} \cdot \bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \bar{\mathsf{x}} \cdot \bar{\mathsf{y}}' = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}}' = 0' \gg \bar{\mathsf{x}} \cdot \bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0'; \mathrm{Ded} \rhd \bar{\mathsf{x}} \cdot \bar{\mathsf{y}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{x}} = 0' \Rightarrow \neg\bar{\mathsf{y}} = 0' \gg \underline{\mathsf{a}} \cdot \underline{\mathsf{b}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{a}} = 0' \Rightarrow \neg\underline{\mathsf{b}} = 0' \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

6.10 3.5h

$[\mathrm{Prop\ 3.5h} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall\underline{\mathsf{a}} \colon \neg\underline{\mathsf{a}} = 0 \Rightarrow \neg\forall_{\mathrm{obj}}\underline{\mathsf{b}} \colon \neg\underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}']$
Beviset for 3.5.h ville i pyk have set ud nogenlunde som følgende:

$$t \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(t = y')$$

Part I

L01	*premise*	$0 \neq 0$
L02	*abbr. L01*	$\neg(0 = 0)$
L03	$3.2.a$	$0 = 0$
L04	*Lemma* 1.11.*c*	$\neg(0 = 0) \Rightarrow ((0 = 0) \Rightarrow (\exists w)(0 = w'))$
L05	$MP, L02, L03$	$(\exists w)(0 = w')$
L06	$Ded, L05$	$(0 \neq 0) \Rightarrow (\exists w)(0 = w')$

Part II

$$\begin{array}{lll}
L01: & premise & (x \neq 0) \Rightarrow (\exists w)(x = w') \\
L02: & S3' & x' \neq 0 \\
L03: & Taut.:\ \mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} & (x = 0) \vee \neg(x = 0) \\
L04: & premise & (x = 0) \\
L05: & S2' & 0' = x' \\
L06: & E4 & (x = 0) \Rightarrow (\exists w)(x' = w') \\
L07: & premise & \neg(x = 0) \\
L08: & MP, L01, L07 & (\exists w)(x = w') \\
L09: & rulec & x = b' \\
L10: & S2' & (\exists w)(x' = w') \\
L11: & E4 & \neg(x = 0) \Rightarrow (\exists w)(x' = w') \\
L12 & Lemma\ H11, L06.L11 & (x' \neq 0) \Rightarrow (\exists w)(x' = w')
\end{array}$$

Tilbage er blot at bruge sætning S9 for at fuldende induktionsbeviset.

7 Udsagn 3.7

Vi har kun lavet de indledende definitioner, da hele 3.7 kræver "existential rule".

7.1 Definitioner af $\neg\forall_{\mathrm{obj}}\mathsf{z}\colon \neg\neg\neg\mathsf{z} = 0 \Rightarrow \neg\mathsf{z} + \bar{\mathsf{x}} = \bar{\mathsf{y}}$

Vi har makrodefineret følgende definitioner:
$[\mathsf{x} < \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{x} < \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} \exists\mathsf{z}\colon (\mathsf{z} \neq 0 \wedge \mathsf{z} + \mathsf{x} = \mathsf{y})]\rceil)]$
$[\mathsf{x} \leq \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{x} \leq \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} \mathsf{x} < \mathsf{y} \vee \mathsf{x} = \mathsf{y}]\rceil)]$
$[\mathsf{x} > \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{x} > \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} \mathsf{y} < \mathsf{x}]\rceil)]$
$[\mathsf{x} \geq \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{x} \geq \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} \mathsf{y} \leq \mathsf{x}]\rceil)]$
$[\mathsf{x} \not< \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{x} \not< \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} \neg(\mathsf{x} < \mathsf{y})]\rceil)]$
$[\mathsf{x} \not> \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{x} \not> \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} \mathsf{y} \not< \mathsf{x}]\rceil)]$
$[\mathsf{x} \mid \mathsf{y} \stackrel{\text{macro}}{\to} \lambda\mathsf{t}.\lambda\mathsf{s}.\lambda\mathsf{c}.\tilde{\mathcal{M}}_4(\mathsf{t},\mathsf{s},\mathsf{c},\lceil[\mathsf{x} \mid \mathsf{y} \mathrel{\ddot{=}} \exists\mathsf{z}\colon \mathsf{y} = \mathsf{x} \cdot \mathsf{z}]\rceil)]$
Ved hjælp af disse definitioner og "existential rule" ville 3.7 kunne bevises.

A Hjælpelemmaer

Til flere af vores beviser har vi brug for nogle hjælpe-lemmaer, disse er bevist i det følgende afsnit

A.1 Liste over hjælpelemmaer

$[\mathrm{Lem1.11c} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Cor1.10a} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}}]$

$[\mathrm{Cor1.10b} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}}]$

$[\mathrm{Lem1.11a} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{Lem1.11b} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{Prop3.2c}' \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}}]$

$[\mathrm{S1}'' \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{c}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{c}}]$

$[\mathrm{Neg}' \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Repetition}' \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{Lem1.11e} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{Lem1.11d} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Prop3.2b}' \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{H10} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{H11} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{c}}]$

$[\mathrm{Lem1.11g} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{MT} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}}]$

A.2 Beviser for hjælpelemmaer

$[\mathrm{Lem1.11c} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Lem1.11c} \stackrel{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \mathrm{Repetition} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{A1}' \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{A1}' \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Neg} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

[Cor1.10a $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \vdash \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{a} \Rightarrow \underline{c}$]

[Cor1.10a $\overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \vdash \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \vdash \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{a} \vdash \mathrm{MP} \triangleright \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \triangleright \underline{a} \gg \underline{b}; \mathrm{MP} \triangleright \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \triangleright \underline{b} \gg \underline{c}; \mathrm{Ded} \triangleright \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \vdash \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{a} \vdash \underline{c} \gg \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{c}; \mathrm{MP} \triangleright \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{c} \triangleright \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \gg \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{c}; \mathrm{MP} \triangleright \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{c} \triangleright \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \gg \underline{a} \Rightarrow \underline{c}\rceil, p_0, c)$]

[Cor1.10b $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{b} \vdash \underline{a} \Rightarrow \underline{c}$]

[Cor1.10b $\overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \vdash \underline{b} \vdash \mathrm{A2}' \gg \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{c}; \mathrm{MP} \triangleright \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{c} \triangleright \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{c} \gg \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{c}; \mathrm{A1}' \gg \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{b}; \mathrm{MP} \triangleright \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \triangleright \underline{b} \gg \underline{a} \Rightarrow \underline{b}; \mathrm{MP} \triangleright \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{c} \triangleright \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \gg \underline{a} \Rightarrow \underline{c}\rceil, p_0, c)$]

[Lem1.11a $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a}$]

[Lem1.11a $\overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \mathrm{Neg}' \gg \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a}; \mathrm{Repetition}' \gg \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a}; \mathrm{Cor1.10b} \triangleright \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \triangleright \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \gg \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a}; \mathrm{A1}' \gg \neg\neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a}; \mathrm{Cor1.10a} \triangleright \neg\neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a} \triangleright \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \gg \neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a}\rceil, p_0, c)$]

[Lem1.11b $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a}$]

[Lem1.11b $\overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \mathrm{Neg}' \gg \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a}; \mathrm{Lem1.11a} \gg \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a}; \mathrm{MP} \triangleright \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a} \triangleright \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{a} \gg \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a}; \mathrm{A1}' \gg \underline{a} \Rightarrow \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a}; \mathrm{Cor1.10a} \triangleright \underline{a} \Rightarrow \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \triangleright \neg\neg\neg\underline{a} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a} \gg \underline{a} \Rightarrow \neg\neg\underline{a}\rceil, p_0, c)$]

[Prop3.2c′ $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{b} = \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{c}$]

[Prop3.2c′ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{b} = \underline{c} \vdash \mathrm{Prop\ 3.2c} \triangleright \underline{a} = \underline{b} \triangleright \underline{b} = \underline{c} \gg \underline{a} = \underline{c}; \mathrm{Ded} \triangleright \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{b} = \underline{c} \vdash \underline{a} = \underline{c} \gg \underline{b} = \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{c}; \mathrm{Ded} \triangleright \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{b} = \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{c} \gg \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{b} = \underline{c} \Rightarrow \underline{a} = \underline{c}\rceil, p_0, c)$]

[S1″ $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} = \underline{c} \Rightarrow \underline{b} = \underline{c}$]

[S1″ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{c} \vdash \mathrm{S1} \triangleright \underline{a} = \underline{b} \triangleright \underline{a} = \underline{c} \gg \underline{b} = \underline{c}; \mathrm{Ded} \triangleright \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{c} \vdash \underline{b} = \underline{c} \gg \underline{a} = \underline{c} \Rightarrow \underline{b} = \underline{c}; \mathrm{Ded} \triangleright \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{c}\colon \underline{a} = \underline{b} \vdash \underline{a} = \underline{c} \Rightarrow \underline{b} = \underline{c} \gg \underline{a} = \underline{b} \Rightarrow \underline{a} = \underline{c} \Rightarrow \underline{b} = \underline{c}\rceil, p_0, c)$]

[Neg′ $\overset{\text{stmt}}{\rightarrow} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg\underline{b} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{b}$]

[Neg′ $\overset{\text{proof}}{\rightarrow} \lambda c.\lambda x.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg\underline{b} \Rightarrow \neg\underline{a} \vdash \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \mathrm{Neg} \triangleright \neg\underline{b} \Rightarrow \neg\underline{a} \triangleright \neg\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \gg \underline{b}; \mathrm{Ded} \triangleright \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \vdash \underline{b} \gg \neg\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{b}; \mathrm{Ded} \triangleright \forall \underline{a}\colon \forall \underline{b}\colon \neg\underline{b} \Rightarrow \neg\underline{a} \vdash \neg\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{b} \gg \neg\underline{b} \Rightarrow \neg\underline{a} \Rightarrow \neg\underline{b} \Rightarrow \underline{a} \Rightarrow \underline{b}\rceil, p_0, c)$]

$[\mathrm{Repetition}' \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{Repetition}' \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \mathrm{Repetition} \rhd \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{H10} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{H10} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \vdash \mathrm{Prop3.2b}' \gg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Lem1.11e} \gg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{MT} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{MT} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{Lem1.11a} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Cor1.10a} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{A1}' \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Neg} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{Lem1.11e} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{Lem1.11e} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{Lem1.11a} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Cor1.10a} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Lem1.11b} \gg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Cor1.10a} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Lem1.11d} \gg \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{Lem1.11d} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Lem1.11d} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \vdash \mathrm{Neg}' \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{A1}' \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Cor1.10a} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{Prop3.2b}' \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}}]$

$[\mathrm{Prop3.2b}' \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{Prop\ 3.2b} \rhd \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \gg \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Ded} \rhd \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{a}} = \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{a}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{Lem1.11g} \overset{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{b}}]$

$[\mathrm{Lem1.11g} \overset{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \mathrm{Lem1.11e} \gg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Lem1.11e} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{MP} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \gg \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}}; \mathrm{Neg} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg\neg \underline{\mathsf{a}} \rhd \neg \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \neg \underline{\mathsf{a}} \gg \underline{\mathsf{b}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

$[\mathrm{H11} \stackrel{\mathrm{stmt}}{\to} \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{c}}]$

$[\mathrm{H11} \stackrel{\mathrm{proof}}{\to} \lambda \mathsf{c}.\lambda \mathsf{x}.\mathcal{P}(\lceil \mathrm{S} \vdash \forall \underline{\mathsf{a}} \colon \forall \underline{\mathsf{b}} \colon \forall \underline{\mathsf{c}} \colon \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \vdash \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \vdash$
$\mathrm{Cor1.10a} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}} \rhd \underline{\mathsf{b}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \gg \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}}; \mathrm{Lem1.11g} \rhd \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \rhd \neg \underline{\mathsf{a}} \Rightarrow \underline{\mathsf{c}} \gg \underline{\mathsf{c}} \rceil, \mathrm{p}_0, \mathsf{c})]$

Litteratur

[Gru06] K. Grue. A logiweb base page. Technical report, Logiweb, 2006. http://www.diku.dk/cgi-bin/cginetd/grue/relay/go/01693B66F0C393B695F3F15770898897A683141109C083AC838ADCA20806/2/.

[Men97] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* Chapmann & Hall, 4. edition, 1997.