Udvidelse af S-reglerne

Maja Hanne Tønnesen, Rune Christoffer Kildetoft Andresen
& Niels Peter Meyn Milthers

30. juni 2006

Indhold

1 Introduktion

Dette skriftlige projekt er lavet i forbindelse med Logik-kurset 2006[1].

Vores mål i denne opgave var at bruge Logiweb[2] til at bevise en delmængde af udsagnene[3] vedrørende læresætningerne[4] fra S-systemet, som er beskrevet i Mendelson [Men97] i kapitel 3.1. For lethedens skyld er alle nummereringer de samme som i Mendelson.

Mere præcist går opgaven ud på at bevise 3.2(j-o), bevise 3.4, bevise 3.5, tilføje aksiomet $\mathrm{x} < \mathrm{y} \Leftrightarrow \exists \mathrm{z} : \mathrm{z} \neq 0 \wedge \mathrm{z} + \mathrm{x} = \mathrm{y}$, bevise 3.7, tilføje aksiomer, der definere $x \mid y$, bevise 3.10 og bevise 3.11.

I afsnittene 3 til 7 er beviserne for de påviste lemmaer gennemgået. Alle trivielle hjælpelemmaer er bevist i appendix A.

2 Konklusion

Vi har ikke løst opgaven til fulde, men har dog formået at bevise 3.2j-o, 3.4, 3.5a-g. På grund af problemer med definitionen af reglen svarende til "existensial rule" side 77 i Mendelson, har vi som beskrevet i afsnit 6 ikke været i stand til at kunne bevise lemmaerne fra 3.5h og frem.

Vi har dog som beskrevet i afsnit 6.10 og 6.2.2 gennemgået hvordan beviserne for hhv. 3.5h og "existensial rule" ville have set ud, hvis problemet ikke var opstået.

Vi har endvidere kort gennemgået de definitioner, som ville være nødvendige for at kunne påvise Lemma 3.7

[1]Kursus 061004/202 Logik
[2]http://logiweb.eu
[3]Eng.: proposition
[4]Eng.: theorem

3 S-reglerne

S-systemet er en første ordens teori, som er udviklet ud fra Peanos postulater og ved hjælp mængdelære. Det skulle være passende at bruge til at bevise basisresultaterne for tal-teori. Aksiomerne for S er følgende:

[**Theory** S]

[S **rule** Gen: $\Pi\mathcal{X},\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \vdash \forall\mathcal{X}\colon \mathcal{A}$]

[S **rule** MP: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$]

[S **rule** Ded: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathrm{Ded}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \Vdash \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$]

[S **rule** S2: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \vdash \mathcal{A}' = \mathcal{B}'$]

[S **rule** S3: $\Pi\mathcal{A}\colon \neg 0 = \mathcal{A}'$]

[S **rule** S4: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}' = \mathcal{B}' \vdash \mathcal{A} = \mathcal{B}$]

[S **rule** S5: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} + 0 = \mathcal{A}$]

[S **rule** S6: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A} + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B})'$]

[S **rule** S7: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \cdot 0 = 0$]

[S **rule** S8: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}') = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) + \mathcal{A}$]

[S **rule** S1: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} = \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} = \mathcal{C}$]

Endvidere er reglen *S9*, som er grundlæggende for matematisk induktion, også en del af *S*-teorien. Denne regel kan på almindeligt sprog udtrykkes som:

> *Hvis en egenskab holder for 0 og egenskaben holder for efterfølgeren* x′ *til et naturligt tal* x*, som egenskaben gælder for, så vil egenskaben gælde for alle naturlige tal.*

I pyk er S9 defineret som:

[S **rule** S9: $\Pi\mathcal{X},\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \langle\mathcal{B}{\equiv}\mathcal{A}|\mathcal{X}{:=}0\rangle \Vdash \langle\mathcal{C}{\equiv}\mathcal{A}|\mathcal{X}{:=}\mathcal{X}'\rangle \Vdash \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A}$]

Reglen for bevis ved modsætninger er den sidste grundlæggende regel, der skal bruges i beviserne. Reglen kan på almindeligt sprog udtrykkes som følgende:

> *Hvis man ud fra en antagelse* A *kan påvise at en egenskab* B *gælder, og at man (når antagelsen stadig gælder) kan vise at den modsatte egenskab* ¬B *også gælder, så må det modsatte af antagelsen gælde, dvs.* ¬A*.*

I pyk er reglen defineret som:

[S **rule** Neg: $\Pi\mathcal{A}\colon \Pi\mathcal{B}\colon \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A} \vdash \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$]

4 Udsagn 3.2

Dette udsagn indeholder de grundlæggende regneregler for tal, som opfører sig som de naturlige tal. Hjælpesætningerne eller lemmaerne er generelt set en direkte konsekvens af aksiomerne.

Alle lemmaerne i dette afsnit kan udledes ud fra de tidligere nævnte og som det er bevist i både check [Gru06] og Mendelson er der for ethvert udtryk $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ følgende velformulerede sætninger[5] i systemet S:

[S **lemma** Prop 3.2a: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} = \mathcal{A}$]

[S **lemma** Prop 3.2b: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \vdash \mathcal{B} = \mathcal{A}$]

[S **lemma** Prop 3.2c: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \vdash \mathcal{B} = \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} = \mathcal{C}$]

[S **lemma** Prop 3.2d: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} = \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} = \mathcal{B}$]

[S **lemma** Prop 3.2e: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$]

[S **lemma** Prop 3.2f: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} = 0 + \mathcal{A}$]

[S **lemma** Prop 3.2g: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon \mathcal{A}' + \mathcal{B} = (\mathcal{A} + \mathcal{B})'$]

[S **lemma** Prop 3.2h: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon \mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$]

Da 3.2i ikke er bevist i check, (men er i Mendelson), har vi valgt for øvelsens skyld at indskrive beviset:

[S **lemma** Prop 3.2i: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \vdash \mathcal{C} + \mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{B}$]

S **proof of** Prop 3.2i:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\quad\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\quad\mathcal{A} = \mathcal{B}$	;
L05:	Prop 3.2e $\rhd$ L04 $\gg$	$\quad\mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$	;
L06:	Prop 3.2h $\gg$	$\quad\mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{C} + \mathcal{A}$	;
L07:	Prop 3.2h $\gg$	$\quad\mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{C} + \mathcal{B}$	;
L08:	S1 $\rhd$ L05 $\rhd$ L06 $\gg$	$\quad\mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{C} + \mathcal{A}$	;
L09:	Prop 3.2b $\rhd$ L08 $\gg$	$\quad\mathcal{C} + \mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$	;
L10:	Prop 3.2c $\rhd$ L09 $\rhd$ L07 $\gg$	$\quad\mathcal{C} + \mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{B}$	;
L11:	Block $\gg$	End	;
L12:	Ded $\rhd$ L11 $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B} \vdash \mathcal{C} + \mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{B}$	□

De følgende lemmaer er opskrevet, men ikke bevist i Mendelson. Disse er blandt dem som vi ønsker at bevise.

[5] Eng.: Wellformed formulas

[S **lemma** Prop 3.2j: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$]

[S **lemma** Prop 3.2k: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A}=\mathcal{B}\vdash \mathcal{A}\cdot\mathcal{C}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$]

[S **lemma** Prop 3.2l: $\Pi\mathcal{A}\colon 0\cdot\mathcal{A}=0$]

[S **lemma** Prop 3.2m: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}'\cdot\mathcal{B}=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{B}$]

[S **lemma** Prop 3.2n: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{A}$]

[S **lemma** Prop 3.2o: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A}=\mathcal{B}\vdash \mathcal{C}\cdot\mathcal{A}=\mathcal{C}\cdot\mathcal{B}$]

Her efter følger beviserne.

4.1 3.2j

Vi vil bevise 3.2j ved induktion efter z i B(z) : (x + y) + z = x + (y + z)
Basistilfældet er:

[S **lemma** Prop 3.2j_1: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\mathcal{A}+\mathcal{B})+0=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+0)$]

S **proof of** Prop 3.2j_1:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	S5 $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+0=\mathcal{A}+\mathcal{B}$	;
L03:	S5 $\gg$	$\mathcal{B}+0=\mathcal{B}$	;
L04:	Prop 3.2i $\rhd$ L03 $\gg$	$\mathcal{A}+(\mathcal{B}+0)=\mathcal{A}+\mathcal{B}$	;
L05:	Prop 3.2d $\rhd$ L02 $\rhd$ L04 $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+0=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+0)$	□

Det induktive trin er:

[S **lemma** Prop 3.2j_2: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})\Rightarrow(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}'=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}')$]

S **proof of** Prop 3.2j_2:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L04:	Premise $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$	;
L05:	S6 $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}'=((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C})'$	;
L06:	S2 $\rhd$ L04 $\gg$	$((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C})'=(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}))'$	;
L07:	Prop 3.2c $\rhd$ L05 $\rhd$ L06 $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}'=(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}))'$	;
L08:	S6 $\gg$	$\mathcal{B}+\mathcal{C}'=(\mathcal{B}+\mathcal{C})'$	;
L09:	Prop 3.2i $\rhd$ L08 $\gg$	$\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}')=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})'$	;
L10:	S6 $\gg$	$\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})'=(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}))'$	;
L11:	Prop 3.2c $\rhd$ L09 $\rhd$ L10 $\gg$	$\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}')=(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}))'$	;
L12:	Prop 3.2d $\rhd$ L07 $\rhd$ L11 $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}'=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}')$	;
L13:	Block $\gg$	End	;
L14:	Ded $\rhd$ L13 $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})\Rightarrow(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}'=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C}')$	□

[S **lemma** Prop 3.2j: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$]

S **proof of** Prop 3.2j:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Prop 3.2j$_1$ $\gg$	$(x+y)+0 = x+(y+0)$	;
L04:	Prop 3.2j$_2$ $\gg$	$(x+y)+z = x+(y+z) \Rightarrow$ $(x+y)+z' = x+(y+z')$	;
L05:	S9 @ z $\rhd$ L03 $\rhd$ L04 $\gg$	$(x+y)+z = x+(y+z)$	;
L06:	Block $\gg$	End	;
L07:	Ded $\rhd$ L06 $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$	$\square$

4.2 3.2k

Vi vil bevise 3.2k ved induktion over z i B(z) : x = y ⇒ x · z = y · z
Basistilfældet er:

[S **lemma** Prop 3.2k$_1$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}=\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\cdot 0 = \mathcal{B}\cdot 0$]

S **proof of** Prop 3.2k$_1$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}=\mathcal{B}$	;
L05:	S7 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot 0 = 0$	;
L06:	S7 $\gg$	$\mathcal{B}\cdot 0 = 0$	;
L07:	Prop 3.2a $\gg$	$0 = 0$	;
L08:	Prop 3.2b $\rhd$ L06 $\gg$	$0 = \mathcal{B}\cdot 0$	;
L09:	Prop 3.2c $\rhd$ L05 $\rhd$ L08 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot 0 = \mathcal{B}\cdot 0$	;
L10:	Block $\gg$	End	;
L11:	Ded $\rhd$ L10 $\gg$	$\mathcal{A}=\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\cdot 0 = \mathcal{B}\cdot 0$	$\square$

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop 3.2k$_2$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A}=\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\cdot\mathcal{C} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A}=\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\cdot\mathcal{C}' = \mathcal{B}\cdot\mathcal{C}')$]

S **proof of** Prop 3.2k$_2$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}=\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}\cdot\mathcal{C} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}=\mathcal{B}$	;
L06:	L04 $\unrhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{C} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$	;
L07:	S8 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}' = \mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{A}$	;
L08:	S8 $\gg$	$\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}' = \mathcal{B}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{B}$	;
L09:	Prop 3.2e $\rhd$ L06 $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{A} = (\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{A}$	;
L10:	Prop 3.2i $\rhd$ L05 $\gg$	$(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{A} = (\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{B}$	;

L11:	Prop 3.2c $\rhd$ L09 $\rhd$ L10 $\gg$	$\quad\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{A}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{B}$	;
L12:	Prop 3.2c $\rhd$ L07 $\rhd$ L11 $\gg$	$\quad\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{B}$	;
L13:	Prop 3.2d $\rhd$ L12 $\rhd$ L08 $\gg$	$\quad\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}'$	;
L14:	Block $\gg$	End	;
L15:	Ded $\rhd$ L14 $\gg$	$(\mathcal{A}=\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})\Rightarrow(\mathcal{A}=\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}')$	□

[S **lemma** Prop 3.2k: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A}=\mathcal{B}\vdash\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$]

S **proof of** Prop 3.2k:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}=\mathcal{B}$	;
L03:	Block $\gg$	Begin	;
L04:	Prop $3.2\mathrm{k}_1$ $\gg$	$\quad x=y\Rightarrow x\cdot 0=y\cdot 0$	;
L05:	Prop $3.2\mathrm{k}_2$ $\gg$	$\quad(x=y\Rightarrow x\cdot z=y\cdot z)\Rightarrow(x=y\Rightarrow x\cdot z'=y\cdot z')$	;
L06:	S9 @ z $\rhd$ L04 $\rhd$ L05 $\gg$	$\quad x=y\Rightarrow x\cdot z=y\cdot z$	;
L07:	Block $\gg$	End	;
L08:	Ded $\rhd$ L07 $\gg$	$\mathcal{A}=\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$	;
L09:	L08 $\unrhd$ L02 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$	□

4.3 3.2l

Vi vil bevise 3.2l ved induktion over x i B(x) : 0 · x = 0
Bemærk at basistilfældet blot er S7.
Det induktive trin:

[S **lemma** Prop $3.2\mathrm{l}_2$: $\Pi\mathcal{A}\colon 0\cdot\mathcal{A}=0\Rightarrow 0\cdot\mathcal{A}'=0$]

S **proof of** Prop $3.2\mathrm{l}_2$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\quad\mathcal{A}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\quad 0\cdot\mathcal{A}=0$	;
L05:	S8 $\gg$	$\quad 0\cdot\mathcal{A}'=0\cdot\mathcal{A}+0$	;
L06:	S5 $\gg$	$\quad 0\cdot\mathcal{A}+0=0\cdot\mathcal{A}$	;
L07:	Prop 3.2c $\rhd$ L05 $\rhd$ L06 $\gg$	$\quad 0\cdot\mathcal{A}'=0\cdot\mathcal{A}$	;
L08:	Prop 3.2c $\rhd$ L07 $\rhd$ L04 $\gg$	$\quad 0\cdot\mathcal{A}'=0$	;
L09:	Block $\gg$	End	;
L10:	Ded $\rhd$ L09 $\gg$	$0\cdot\mathcal{A}=0\Rightarrow 0\cdot\mathcal{A}'=0$	□

[S **lemma** Prop 3.2l: $\Pi\mathcal{A}\colon 0\cdot\mathcal{A}=0$]

S **proof of** Prop 3.2l:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	S7 $\gg$	$\quad 0\cdot 0=0$	;
L04:	Prop $3.2\mathrm{l}_2$ $\gg$	$\quad 0\cdot x=0\Rightarrow 0\cdot x'=0$	;

L05:	S9 @ x ▷ L03 ▷ L04 ≫	$\quad 0 \cdot x = 0$	;
L06:	Block ≫	End	;
L07:	Ded ▷ L06 ≫	$0 \cdot \mathcal{A} = 0$	□

4.4 3.2m

Vi vil bevise 3.2m ved induktion over y i B(y) : $x' \cdot y = x \cdot y + x$
Basistilfældet:

[S **lemma** Prop 3.2m_1 : $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A}' \cdot 0 = \mathcal{A} \cdot 0 + 0$]

S **proof of** Prop 3.2m_1 :

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A}$	;
L02:	S7 ≫	$\mathcal{A}' \cdot 0 = 0$	;
L03:	Prop 3.2f ≫	$0 = 0 + 0$	;
L04:	S7 ≫	$\mathcal{A} \cdot 0 = 0$	;
L05:	Prop 3.2b ▷ L04 ≫	$0 = \mathcal{A} \cdot 0$	;
L06:	Prop 3.2e ▷ L05 ≫	$0 + 0 = \mathcal{A} \cdot 0 + 0$	;
L07:	Prop 3.2c ▷ L03 ▷ L06 ≫	$0 = \mathcal{A} \cdot 0 + 0$	;
L08:	Prop 3.2c ▷ L02 ▷ L07 ≫	$\mathcal{A}' \cdot 0 = \mathcal{A} \cdot 0 + 0$	;

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop 3.2m_2 : $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' + \mathcal{B}'$]

S **proof of** Prop 3.2m_2 :

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Arbitrary ≫	$\quad \mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise ≫	$\quad \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{B}$	;
L05:	S8 ≫	$\quad \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A}'$	;
L06:	Prop 3.2e ▷ L04 ≫	$\quad (\mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}) + \mathcal{A}' = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{B}) + \mathcal{A}'$	;
L07:	S6 ≫	$\quad \mathcal{B} + \mathcal{A}' = (\mathcal{B} + \mathcal{A})'$	;
L08:	Prop 3.2g ≫	$\quad \mathcal{B}' + \mathcal{A} = (\mathcal{B} + \mathcal{A})'$	;
L09:	Prop 3.2d ▷ L07 ▷ L08 ≫	$\quad \mathcal{B} + \mathcal{A}' = \mathcal{B}' + \mathcal{A}$	;
L10:	Prop 3.2h ≫	$\quad \mathcal{B}' + \mathcal{A} = \mathcal{A} + \mathcal{B}'$	;
L11:	Prop 3.2c ▷ L09 ▷ L10 ≫	$\quad \mathcal{B} + \mathcal{A}' = \mathcal{A} + \mathcal{B}'$	;
L12:	Prop 3.2i ▷ L11 ≫	$\quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + (\mathcal{B} + \mathcal{A}') = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + (\mathcal{A} + \mathcal{B}')$	;
L13:	Prop 3.2j ≫	$\quad (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A}) + \mathcal{B}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + (\mathcal{A} + \mathcal{B}')$	;
L14:	Prop 3.2d ▷ L12 ▷ L13 ≫	$\quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + (\mathcal{B} + \mathcal{A}') = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A}) + \mathcal{B}'$	;
L15:	S8 ≫	$\quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A}$	;
L16:	Prop 3.2e ▷ L15 ≫	$\quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A}) + \mathcal{B}'$	;
L17:	Prop 3.2d ▷ L14 ▷ L16 ≫	$\quad \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + (\mathcal{B} + \mathcal{A}') = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' + \mathcal{B}'$	;
L18:	Prop 3.2j ≫	$\quad (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{B}) + \mathcal{A}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + (\mathcal{B} + \mathcal{A}')$	;

L19:	Prop 3.2c ▷ L06 ▷ L18 ≫	$\quad(\mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}) + \mathcal{A}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + (\mathcal{B} + \mathcal{A}')$	;
L20:	Prop 3.2c ▷ L19 ▷ L17 ≫	$\quad(\mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}) + \mathcal{A}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' + \mathcal{B}'$	;
L21:	Prop 3.2c ▷ L05 ▷ L20 ≫	$\quad\mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' + \mathcal{B}'$	;
L22:	Block ≫	End	;
L23:	Ded ▷ L22 ≫	$\mathcal{A}' \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' + \mathcal{B}'$	□

[S **lemma** Prop 3.2m: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{B}$]

S **proof of** Prop 3.2m:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Prop $3.2\mathrm{m}_1$ ≫	$\quad x' \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$	;
L04:	Prop $3.2\mathrm{m}_2$ ≫	$\quad(x' \cdot y = x \cdot y + y) \Rightarrow (x' \cdot y' = x \cdot y' + y')$	;
L05:	S9 @ y ▷ L03 ▷ L04 ≫	$\quad x' \cdot y = x \cdot y + y$	;
L06:	Block ≫	End	;
L07:	Ded ▷ L06 ≫	$\mathcal{A}' \cdot \mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{B}$	□

4.5 3.2n

Vi vil bevise 3.2n ved induktion over y i B(y) : x · y = y · x
Basistilfældet:

[S **lemma** Prop $3.2\mathrm{n}_1$: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \cdot 0 = 0 \cdot \mathcal{A}$]

S **proof of** Prop $3.2\mathrm{n}_1$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A}$	;
L02:	S7 ≫	$\mathcal{A} \cdot 0 = 0$	;
L03:	Prop 3.2l ≫	$0 \cdot \mathcal{A} = 0$	;
L04:	Prop 3.2d ▷ L02 ▷ L03 ≫	$\mathcal{A} \cdot 0 = 0 \cdot \mathcal{A}$	□

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop $3.2\mathrm{n}_2$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{B}' \cdot \mathcal{A}$]

S **proof of** Prop $3.2\mathrm{n}_2$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Arbitrary ≫	$\quad\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise ≫	$\quad\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$	;
L05:	S8 ≫	$\quad\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A}$	;
L06:	Prop 3.2e ▷ L04 ≫	$\quad\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A}$	;
L07:	Prop 3.2m ≫	$\quad\mathcal{B}' \cdot \mathcal{A} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A}$	;
L08:	Prop 3.2b ▷ L07 ≫	$\quad\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A} = \mathcal{B}' \cdot \mathcal{A}$	;
L09:	Prop 3.2c ▷ L06 ▷ L08 ≫	$\quad\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} = \mathcal{B}' \cdot \mathcal{A}$	;
L10:	Prop 3.2c ▷ L05 ▷ L09 ≫	$\quad\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{B}' \cdot \mathcal{A}$	;
L11:	Block ≫	End	;
L12:	Ded ▷ L11 ≫	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{B}' \cdot \mathcal{A}$	□

[S **lemma** Prop 3.2n: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{A}$]

S **proof of** Prop 3.2n:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Prop 3.2n$_1$ $\gg$	$\quad x\cdot 0 = 0\cdot x$	;
L04:	Prop 3.2n$_2$ $\gg$	$\quad (x\cdot y = y\cdot x) \Rightarrow (x\cdot y' = y'\cdot x)$	;
L05:	S9 @ y $\rhd$ L03 $\rhd$ L04 $\gg$	$\quad x\cdot y = y\cdot x$	;
L06:	Block $\gg$	End	;
L07:	Ded $\rhd$ L06 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{A}$	$\square$

4.6 3.2o

[S **lemma** Prop 3.2o: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \vdash \mathcal{C}\cdot\mathcal{A} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{B}$]

S **proof of** Prop 3.2o:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B}$	;
L03:	Block $\gg$	Begin	;
L04:	Arbitrary $\gg$	$\quad \mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\quad \mathcal{A} = \mathcal{B}$	;
L06:	Prop 3.2k $\rhd$ L05 $\gg$	$\quad \mathcal{A}\cdot\mathcal{C} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$	;
L07:	Prop 3.2n $\gg$	$\quad \mathcal{A}\cdot\mathcal{C} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{A}$	;
L08:	Prop 3.2n $\gg$	$\quad \mathcal{B}\cdot\mathcal{C} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{B}$	;
L09:	Prop 3.2c $\rhd$ L06 $\rhd$ L08 $\gg$	$\quad \mathcal{A}\cdot\mathcal{C} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{B}$	;
L10:	S1 $\rhd$ L07 $\rhd$ L09 $\gg$	$\quad \mathcal{C}\cdot\mathcal{A} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{B}$	;
L11:	Block $\gg$	End	;
L12:	Ded $\rhd$ L11 $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}\cdot\mathcal{A} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{B}$	;
L13:	L12 $\unrhd$ L02 $\gg$	$\mathcal{C}\cdot\mathcal{A} = \mathcal{C}\cdot\mathcal{B}$	$\square$

5 Udsagn 3.4

De følgende udsagn er en udvidelse af egenskaberne ved addition og multiplikation.

[S **lemma** Prop 3.4a: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) + (\mathcal{A}\cdot\mathcal{C})$]

[S **lemma** Prop 3.4b: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{B}+\mathcal{C})\cdot\mathcal{A} = (\mathcal{B}\cdot\mathcal{A}) + (\mathcal{C}\cdot\mathcal{A})$]

[S **lemma** Prop 3.4c: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C} = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})$]

[S **lemma** Prop 3.4d: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A}+\mathcal{C} = \mathcal{B}+\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$]

5.1 3.4a

Vi vil bevise 3.4a ved induktion over z i B(z) : x · (y + z) = x · y + x · z
Basistilfældet:

[S **lemma** Prop 3.4a$_1$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}$: $\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+0)=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot 0$]

S **proof of** Prop 3.4a$_1$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	S5 ≫	$(\mathcal{B}+0)=(\mathcal{B})$	;
L03:	Prop 3.2o ▷ L02 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+0)=\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B})$	;
L04:	S5 ≫	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+0=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$	;
L05:	Prop 3.2d ▷ L03 ▷ L04 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+0)=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+0$	;
L06:	S7 ≫	$\mathcal{A}\cdot 0=0$	;
L07:	Prop 3.2i ▷ L06 ≫	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot 0=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+0$	;
L08:	Prop 3.2d ▷ L05 ▷ L07 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+0)=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot 0$	□

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop 3.4a$_2$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$: $\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}\Rightarrow\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}')=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'$]

S **proof of** Prop 3.4a$_2$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L04:	Premise ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}$	;
L05:	S6 ≫	$\mathcal{B}+\mathcal{C}'=(\mathcal{B}+\mathcal{C})'$	;
L06:	Prop 3.2o ▷ L05 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}')=\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})'$	;
L07:	S8 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})'=\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})+\mathcal{A}$	;
L08:	Prop 3.2e ▷ L04 ≫	$(\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}))+\mathcal{A}=(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{A}$	;
L09:	Prop 3.2j ≫	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{A}=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+(\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{A})$	;
L10:	Prop 3.2c ▷ L08 ▷ L09 ≫	$(\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}))+\mathcal{A}=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+(\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{A})$	;
L11:	S8 ≫	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'=\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{A}$	;
L12:	Prop 3.2i ▷ L11 ≫	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+(\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{A})$	;
L13:	Prop 3.2d ▷ L10 ▷ L12 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})+\mathcal{A}=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'$	;
L14:	Prop 3.2c ▷ L07 ▷ L13 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})'=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'$	;
L15:	Prop 3.2c ▷ L06 ▷ L14 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}')=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'$	;
L16:	Block ≫	End	;
L17:	Ded ▷ L16 ≫	$(\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C})\Rightarrow\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C}')=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}'$	□

[S **lemma** Prop 3.4a: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$: $\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}+\mathcal{C})=(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})+(\mathcal{A}\cdot\mathcal{C})$]

S **proof of** Prop 3.4a:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Prop 3.4a$_1$ ≫	$x\cdot(y+0)=x\cdot y+x\cdot 0$	;
L04:	Prop 3.4a$_2$ ≫	$(x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z)\Rightarrow(x\cdot(y+z')=x\cdot y+x\cdot z')$	;

L05:	S9 @ $z \rhd$ L03 $\rhd$ L04 $\gg$	$\quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	;
L06:	Block $\gg$	End	;
L07:	Ded $\rhd$ L06 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$	□

5.2 3.4b

[S **lemma** Prop 3.4b: $\Pi \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon (\mathcal{B}+\mathcal{C}) \cdot \mathcal{A} = (\mathcal{B} \cdot \mathcal{A}) + (\mathcal{C} \cdot \mathcal{A})$]

S **proof of** Prop 3.4b:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	;
L02:	Prop 3.4a $\gg$	$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$	;
L03:	Prop 3.2n $\gg$	$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B}+\mathcal{C}) = (\mathcal{B}+\mathcal{C}) \cdot \mathcal{A}$	;
L04:	Prop 3.2n $\gg$	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$	;
L05:	Prop 3.2n $\gg$	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C} \cdot \mathcal{A}$	;
L06:	S1 $\rhd$ L03 $\rhd$ L02 $\gg$	$(\mathcal{B}+\mathcal{C}) \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$	;
L07:	Prop 3.2e $\rhd$ L04 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$	;
L08:	Prop 3.2i $\rhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{C} \cdot \mathcal{A}$	;
L09:	Prop 3.2c $\rhd$ L07 $\rhd$ L08 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{C} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{C} \cdot \mathcal{A}$	;
L10:	Prop 3.2c $\rhd$ L06 $\rhd$ L09 $\gg$	$(\mathcal{B}+\mathcal{C}) \cdot \mathcal{A} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} + \mathcal{C} \cdot \mathcal{A}$	□

5.3 3.4c

Vi vil bevise 3.4c ved induktion over z i B(z) : (x · y) · z = x · (y · z)
Basistilfældet:

[S **lemma** Prop $3.4c_1$: $\Pi \mathcal{A}, \mathcal{B}\colon (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot 0 = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot 0)$]

S **proof of** Prop $3.4c_1$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L02:	S7 $\gg$	$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot 0 = 0$	;
L03:	S7 $\gg$	$\mathcal{B} \cdot 0 = 0$	;
L04:	Prop 3.2o $\rhd$ L03 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot 0) = \mathcal{A} \cdot 0$	;
L05:	S7 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot 0 = 0$	;
L06:	Prop 3.2c $\rhd$ L04 $\rhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot 0) = 0$	;
L07:	Prop 3.2d $\rhd$ L02 $\rhd$ L06 $\gg$	$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot 0 = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot 0)$	□

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop $3.4c_2$: $\Pi \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}' = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}')$]

S **proof of** Prop $3.4c_2$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\quad \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\quad (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C})$	;
L05:	S8 $\gg$	$\quad (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}' = (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C} + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$	;
L06:	Prop 3.2e $\rhd$ L04 $\gg$	$\quad ((\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{C}) + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = (\mathcal{A} \cdot (\mathcal{B} \cdot \mathcal{C})) + (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B})$	;

L07:	Prop 3.2c ▷ L05 ▷ L06 ≫	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}' = (\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}))+(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})$	;
L08:	Prop 3.4a ≫	$\mathcal{A}\cdot((\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{B}) = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$	;
L09:	Prop 3.2d ▷ L07 ▷ L08 ≫	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}' = \mathcal{A}\cdot((\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})+\mathcal{B})$	;
L10:	S8 ≫	$\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}' = \mathcal{B}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{B}$	;
L11:	Prop 3.2o ▷ L10 ≫	$\mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}') = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}+\mathcal{B})$	;
L12:	Prop 3.2d ▷ L09 ▷ L11 ≫	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}' = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}')$	;
L13:	Block ≫	End	;
L14:	Ded ▷ L13 ≫	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C} = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C}' = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}')$	□

[S **lemma** Prop 3.4c: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C} = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})$]

S **proof of** Prop 3.4c:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Prop 3.4c$_1$ ≫	$(x\cdot y)\cdot 0 = x\cdot(y\cdot 0)$	;
L04:	Prop 3.4c$_2$ ≫	$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \Rightarrow (x\cdot y)\cdot z' = x\cdot(y\cdot z')$	;
L05:	S9 @ z ▷ L03 ▷ L04 ≫	$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$	;
L06:	Block ≫	End	;
L07:	Ded ▷ L06 ≫	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})\cdot\mathcal{C} = \mathcal{A}\cdot(\mathcal{B}\cdot\mathcal{C})$	□

5.4 3.4d

Vi vil bevise 3.4d ved induktion over z i B(z) : x + z = y + z ⇒ x = y
Basistilfældet er:

[S **lemma** Prop 3.4d$_1$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}+0 = \mathcal{B}+0 \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$]

S **proof of** Prop 3.4d$_1$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise ≫	$\mathcal{A}+0 = \mathcal{B}+0$	;
L05:	S5 ≫	$\mathcal{A}+0 = \mathcal{A}$	;
L06:	S5 ≫	$\mathcal{B}+0 = \mathcal{B}$	;
L07:	S1 ▷ L05 ▷ L04 ≫	$\mathcal{A} = \mathcal{B}+0$	;
L08:	Prop 3.2c ▷ L07 ▷ L06 ≫	$\mathcal{A} = \mathcal{B}$	;
L09:	Block ≫	End	;
L10:	Ded ▷ L09 ≫	$\mathcal{A}+0 = \mathcal{B}+0 \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$	□

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop 3.4d$_2$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A}+\mathcal{C} = \mathcal{B}+\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}+\mathcal{C}' = \mathcal{B}+\mathcal{C}' \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$]

S **proof of** Prop 3.4d$_2$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;

L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{C}' = \mathcal{B} + \mathcal{C}'$	;
L06:	S6 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{C}' = (\mathcal{A} + \mathcal{C})'$	;
L07:	S6 $\gg$	$\mathcal{B} + \mathcal{C}' = (\mathcal{B} + \mathcal{C})'$	;
L08:	S1 $\rhd$ L06 $\rhd$ L05 $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{C})' = \mathcal{B} + \mathcal{C}'$	;
L09:	Prop 3.2c $\rhd$ L08 $\rhd$ L07 $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{C})' = (\mathcal{B} + \mathcal{C})'$	;
L10:	S4 $\rhd$ L09 $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{C}) = (\mathcal{B} + \mathcal{C})$	;
L11:	L04 $\unrhd$ L10 $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B}$	;
L12:	Block $\gg$	End	;
L13:	Ded $\rhd$ L12 $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{C}' = \mathcal{B} + \mathcal{C}' \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$	$\square$

[S **lemma** Prop 3.4d: $\Pi \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon \mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$]

S **proof of** Prop 3.4d:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Prop 3.4d$_1$ $\gg$	$x + 0 = y + 0 \Rightarrow x = y$	;
L04:	Prop 3.4d$_2$ $\gg$	$(x + z = y + z \Rightarrow x = y) \Rightarrow x + z' = y + z' \Rightarrow x = y$	;
L05:	S9 @ z $\rhd$ L03 $\rhd$ L04 $\gg$	$x + z = y + z \Rightarrow x = y$	;
L06:	Block $\gg$	End	;
L07:	Ded $\rhd$ L06 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{C} = \mathcal{B} + \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$	$\square$

6 Udsagn 3.5

I denne del har vi kun kunne løse indtil h, da denne og de efterfølgende kræver reglen “existensial rule”. Dog er der i afsnit 6.2.2 genemgået hvilket problem, der forhindrer os i at bevise ” existencial rule”, og hvordan vi ville have bevist reglen, hvis problemet ikke var opstået. Endvidere er der i 6.10 genemgået hvordan vi ville have løst 3.5h.

I de følgende udsagn indgår numeraler, der opfører sig som de naturlige tal og er defineret i forhold til 0 på følgende måde:

$$
\begin{array}{lcl}
0 & = & \overline{0} \\
0' & = & \overline{1} \\
0'' & = & \overline{2} \\
\vdots & & \vdots \\
0^{n*'} & = & \overline{n}
\end{array}
$$

Dvs. hvis $\overline{0}$ er et numeral, og hvis $\overline{\text{n}}$ er et numeral, så er $\overline{\text{n}}'$ også.

I afsnit 6.3 til 6.10 er beviserne for følgende lemmaer (indtil h).

[S **lemma** Prop 3.5a: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A}+\overline{1}=\mathcal{A}'$]

[S **lemma** Prop 3.5b: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A}\cdot\overline{1}=\mathcal{A}$]

[S **lemma** Prop 3.5c: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A}\cdot\overline{2}=\mathcal{A}+\mathcal{A}$]

[S **lemma** Prop 3.5d: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}+\mathcal{B}=0 \Rightarrow \mathcal{A}=0 \wedge \mathcal{B}=0$]

[S **lemma** Prop 3.5e: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{B}\neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=0 \Rightarrow \mathcal{A}=0)$]

[S **lemma** Prop 3.5f: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}+\mathcal{B}=\overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A}=0 \wedge \mathcal{B}=\overline{1}) \vee (\mathcal{A}=\overline{1} \wedge \mathcal{B}=0)$]

[S **lemma** Prop 3.5g: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A}=\overline{1} \wedge \mathcal{B}=\overline{1})$]

[S **lemma** Prop 3.5h: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A}\neq 0 \Rightarrow \exists\mathcal{B}\colon \mathcal{A}=\mathcal{B}'$]

[S **lemma** Prop 3.5i: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{C}\neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{C}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}=\mathcal{B})$]

[S **lemma** Prop 3.5j: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A}\neq 0 \Rightarrow \mathcal{A}\neq\overline{1} \Rightarrow \exists\mathcal{B}\colon \mathcal{A}=\mathcal{B}''$]

Efterfølgende vil vi gennemgåde nødvendige hjælpesætninger og definitioner for at kunne bevise 3.5a-3.5g.

6.1 Definitioner i forbindelse med ∧ og ∨

Fra 3.5d bruges ∧ og ∨, som begge er makrodefinerede udtryk:

[$\mathsf{x} \wedge \mathsf{y} \doteqdot \neg(\mathsf{x} \Rightarrow \neg\mathsf{y})$]

[$\mathsf{x} \vee \mathsf{y} \doteqdot (\neg\mathsf{x}) \Rightarrow \mathsf{y}$]

Endvidere er det klart at reglerne for introduktion og eliminering af hhv. ∧ og ∨ dermed også skal bruges. Alle disse er bevist i de følgende afsnit.

6.1.1 Introduktion af ∧

[S **lemma** Con: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}\vdash\mathcal{B}\vdash\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$]

S **proof of** Con:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L03:	Premise $\gg$	$\mathcal{B}$	;
L04:	Block $\gg$	Begin	;
L05:	Arbitrary $\gg$	$\quad\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L06:	Premise $\gg$	$\quad\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}$	;
L07:	Repetition $\rhd$ L02 $\gg$	$\quad\mathcal{A}$	;
L08:	L06 $\unrhd$ L07 $\gg$	$\quad\neg\mathcal{B}$	;
L09:	Block $\gg$	End	;
L10:	Ded $\rhd$ L09 $\gg$	$(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})\Rightarrow\neg\mathcal{B}$	;
L11:	Lem1.11b $\gg$	$\mathcal{B}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{B}$	;
L12:	L11 $\unrhd$ L03 $\gg$	$\neg\neg\mathcal{B}$	;
L13:	MT $\rhd$ L10 $\rhd$ L12 $\gg$	$\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})$	□

6.1.2 Elimination af $\wedge$ 1

[S **lemma** Con1 : $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}\wedge\mathcal{B}\vdash\mathcal{A}$]

S **proof of** Con1 :

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})$	;
L03:	Block $\gg$	Begin	;
L04:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\neg\mathcal{A}$	;
L06:	A1′ $\gg$	$\neg\mathcal{A}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A}$	;
L07:	L06 $\trianglerighteq$ L05 $\gg$	$\neg\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A}$	;
L08:	Lem1.11d $\gg$	$(\neg\neg\mathcal{B}\Rightarrow\neg\mathcal{A})\Rightarrow\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}$	;
L09:	L08 $\trianglerighteq$ L07 $\gg$	$\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}$	;
L10:	Block $\gg$	End	;
L11:	Ded $\triangleright$ L10 $\gg$	$(\neg\mathcal{A})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})$	;
L12:	MT $\triangleright$ L11 $\triangleright$ L02 $\gg$	$\neg\neg\mathcal{A}$	;
L13:	Lem1.11a $\gg$	$\neg\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$	;
L14:	L13 $\trianglerighteq$ L12 $\gg$	$\mathcal{A}$	$\square$

6.1.3 Elimination af $\wedge$ 2

[S **lemma** Con2 : $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}\wedge\mathcal{B}\vdash\mathcal{B}$]

S **proof of** Con2 :

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B})$	;
L03:	Block $\gg$	Begin	;
L04:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\neg\mathcal{B}$	;
L06:	A1′ $\gg$	$\neg\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}$	;
L07:	L06 $\trianglerighteq$ L05 $\gg$	$\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}$	;
L08:	Block $\gg$	End	;
L09:	Ded $\triangleright$ L08 $\gg$	$\neg\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}\Rightarrow\neg\mathcal{B}$	;
L10:	MT $\triangleright$ L09 $\triangleright$ L02 $\gg$	$\neg\neg\mathcal{B}$	;
L11:	Lem1.11a $\gg$	$\neg\neg\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{B}$	;
L12:	L11 $\trianglerighteq$ L10 $\gg$	$\mathcal{B}$	$\square$

6.1.4 Introduktion af $\vee$ 1

[S **lemma** Dis1 : $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A}\vdash\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$]

S **proof of** Dis1 :

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L03:	Lem1.11c $\gg$	$\neg\neg\mathcal{A}\Rightarrow(\neg\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$	;
L04:	Lem1.11b $\gg$	$\mathcal{A}\Rightarrow\neg\neg\mathcal{A}$	;

L05: L04 $\trianglerighteq$ L02 $\gg$ $\neg\neg\mathcal{A}$;
L06: L03 $\trianglerighteq$ L05 $\gg$ $\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ □

6.1.5 Introduktion af $\vee$ 2

[S **lemma** Dis2: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$]

S **proof of** Dis2:
L01: Arbitrary $\gg$ $\mathcal{A},\mathcal{B}$;
L02: Premise $\gg$ $\mathcal{B}$;
L03: A1′ $\gg$ $\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$;
L04: L03 $\trianglerighteq$ L02 $\gg$ $\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ □

6.1.6 Elimination af $\vee$

Da vi ikke har haft brug for at fjerne $\vee$, har vi ikke bevist denne regel.

6.2 Andre hjælpesætninger

Vi har til beviset af 3.5a-3.5g haft brug for nogle af reglerne fra [Gru06], dog med `imply` istedet for `infer`. Sådanne regler er navngivet med <oprindelige navn>' og beviserne for disse kan ses i Appendix A.

6.2.1 $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$

En ny hjælperegel er **regel** H3, som skal bruges i forbindelse med $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ for at kunne konkludere sammenhænge i mellem $(\mathrm{x} = \mathrm{y}) \wedge (\mathrm{x} \neq 3) \Rightarrow (\mathrm{y} \neq 3)$.

[S **lemma** H3: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \vdash \mathcal{A} \vdash \neg\mathcal{C} \vdash \neg\mathcal{B}$]

S **proof of** H3:
L01: Arbitrary $\gg$ $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$;
L02: Premise $\gg$ $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$;
L03: Premise $\gg$ $\mathcal{A}$;
L04: Premise $\gg$ $\neg\mathcal{C}$;
L05: L02 $\trianglerighteq$ L03 $\gg$ $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$;
L06: MT $\triangleright$ L05 $\triangleright$ L04 $\gg$ $\neg\mathcal{B}$ □

6.2.2 $\exists$ x

Selv om vi ikke har nået at implementere fra opgave 3.5h, hvor der gøres brug af $\exists$, har vi alligevel makrodefineret kvantoren som følger.

[$\exists$x: y $\ddot{=}$ $\neg$($\forall$x: $\neg$y)]

Vores problem har været, at vi ikke har kunne udtrykke *"$\mathcal{B}$(x, t), hvor t kan indsættes i stedet for x'erne uden at blive bundet til en alkvantor"*, i pyk.

Beviset for hjælpesætningen, der indfører eksistenskvantoren, ville dog have været opbygget nogenlunde som følger.

Følgende tautologi,

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

antages vist nogenlunde som Modus Tollens, dog med variation.
Ved axiom A4′ kan vi få instansen:

$$(\forall x)\neg\mathcal{A}(x,t) \Rightarrow \neg A(t,t)$$

Idet man kan få følgende instans af tautologien:

$$\big((\forall x)\neg\mathcal{A}(x,t) \Rightarrow \neg A(t,t)\big) \Rightarrow \big(A(t,t) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg\mathcal{A}(x,t)\big)$$

kan man vha. MP på tautologi-instansen og aksiom-instansen få:

$$\big(A(t,t) \Rightarrow \neg(\forall x)\neg\mathcal{A}(x,t)\big)$$

og pga. af makrodefinitionen er denne nu vist.
Herefter vises Lemmaerne 3.5a-3.5g

6.3 3.5a

Dette lemma beviser, at hvis man lægger $\overline{1}$ til et tal, får man efterølgeren til tallet.

[S **lemma** Prop 3.5a: $\Pi\mathcal{A}$: $\mathcal{A} + \overline{1} = \mathcal{A}'$]

S **proof of** Prop 3.5a:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	S6 $\gg$	$\mathcal{A} + 0' = (\mathcal{A} + 0)'$	;
L03:	S5 $\gg$	$\mathcal{A} + 0 = \mathcal{A}$	;
L04:	S2 $\rhd$ L03 $\gg$	$(\mathcal{A} + 0)' = \mathcal{A}'$	;
L05:	Prop 3.2c $\rhd$ L02 $\rhd$ L04 $\gg$	$\mathcal{A} + 0' = \mathcal{A}'$	;
L06:	Prop 3.2a $\gg$	$\mathcal{A} + 0' = \mathcal{A} + \overline{1}$	;
L07:	S1 $\rhd$ L06 $\rhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{A} + \overline{1} = \mathcal{A}'$	$\square$

6.4 3.5b

Her beviser vi at $\overline{1}$ er neutralt element med hensyn til multiplikation.

[S **lemma** Prop 3.5b: $\Pi\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \cdot \overline{1} = \mathcal{A}$]

S **proof of** Prop 3.5b:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	S8 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot 0' = \mathcal{A} \cdot 0 + \mathcal{A}$	;
L03:	S7 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot 0 = 0$	;

L04:	Prop 3.2e ▷ L03 ≫	$\mathcal{A} \cdot 0 + \mathcal{A} = 0 + \mathcal{A}$	;
L05:	Prop 3.2c ▷ L02 ▷ L04 ≫	$\mathcal{A} \cdot 0' = 0 + \mathcal{A}$	;
L06:	Prop 3.2f ≫	$\mathcal{A} = 0 + \mathcal{A}$	;
L07:	Prop 3.2b ▷ L06 ≫	$0 + \mathcal{A} = \mathcal{A}$	;
L08:	Prop 3.2c ▷ L05 ▷ L07 ≫	$\mathcal{A} \cdot 0' = \mathcal{A}$	;
L09:	Prop 3.2a ≫	$\mathcal{A} \cdot 0' = \mathcal{A} \cdot \overline{1}$	;
L10:	S1 ▷ L09 ▷ L08 ≫	$\mathcal{A} \cdot \overline{1} = \mathcal{A}$	□

6.5 3.5c

[S **lemma** Prop 3.5c: $\Pi\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \cdot \overline{2} = \mathcal{A} + \mathcal{A}$]

S **proof of** Prop 3.5c:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A}$	;
L02:	S8 ≫	$\mathcal{A} \cdot \overline{1}' = \mathcal{A} \cdot \overline{1} + \mathcal{A}$	;
L03:	Prop 3.5b ≫	$\mathcal{A} \cdot \overline{1} = \mathcal{A}$	;
L04:	Prop 3.2e ▷ L03 ≫	$\mathcal{A} \cdot \overline{1} + \mathcal{A} = \mathcal{A} + \mathcal{A}$	;
L05:	Prop 3.2c ▷ L02 ▷ L04 ≫	$\mathcal{A} \cdot \overline{1}' = \mathcal{A} + \mathcal{A}$	;
L06:	Prop 3.2a ≫	$\mathcal{A} \cdot \overline{1}' = \mathcal{A} \cdot \overline{2}$	;
L07:	S1 ▷ L06 ▷ L05 ≫	$\mathcal{A} \cdot \overline{2} = \mathcal{A} + \mathcal{A}$	□

6.6 3.5d

Her beviser vi, at hvis en sum er 0, er begge addender i summen 0, da der ikke findes negative tal i systemet.
Beviset er ved induktion over y i $B(y) : x + y \Rightarrow (x = 0) \wedge (y = 0)$
Basistilfældet:

[S **lemma** Prop 3.5d$_1$: $\Pi\mathcal{A}$: $\mathcal{A} + 0 = 0 \Rightarrow (\mathcal{A} = 0) \wedge (0 = 0)$]

S **proof of** Prop 3.5d$_1$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Arbitrary ≫	$\quad\mathcal{A}$	;
L04:	Premise ≫	$\quad\mathcal{A} + 0 = 0$	;
L05:	S5 ≫	$\quad\mathcal{A} + 0 = \mathcal{A}$	;
L06:	S1 ▷ L05 ▷ L04 ≫	$\quad\mathcal{A} = 0$	;
L07:	Prop 3.2a ≫	$\quad 0 = 0$	;
L08:	Con ▷ L06 ▷ L07 ≫	$\quad\mathcal{A} = 0 \wedge 0 = 0$	;
L09:	Block ≫	End	;
L10:	Ded ▷ L09 ≫	$\mathcal{A} + 0 = 0 \Rightarrow (\mathcal{A} = 0) \wedge (0 = 0)$	□

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop 3.5d$_2$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}$: $(\mathcal{A} + \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = 0) \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = 0$]

S **proof of** Prop 3.5d$_2$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = 0$	;
L05:	Block $\gg$	Begin	;
L06:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L07:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' = 0$	;
L08:	S3 $\gg$	$0 \neq (\mathcal{A} + \mathcal{B})'$	;
L09:	Prop3.2b$'$ $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{B})' = 0 \Rightarrow 0 = (\mathcal{A} + \mathcal{B})'$	;
L10:	Lem1.11e $\gg$	$((\mathcal{A} + \mathcal{B})' = 0 \Rightarrow 0 = (\mathcal{A} + \mathcal{B})') \Rightarrow 0 \neq (\mathcal{A} + \mathcal{B})' \Rightarrow (\mathcal{A} + \mathcal{B})' \neq 0$	;
L11:	L10 $\trianglerighteq$ L09 $\gg$	$0 \neq (\mathcal{A} + \mathcal{B})' \Rightarrow (\mathcal{A} + \mathcal{B})' \neq 0$	;
L12:	L11 $\trianglerighteq$ L08 $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{B})' \neq 0$	;
L13:	S6 $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{B}') = (\mathcal{A} + \mathcal{B})'$	;
L14:	S1$''$ $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B})' \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}' = 0 \Rightarrow (\mathcal{A} + \mathcal{B})' = 0$	;
L15:	H3 $\triangleright$ L14 $\triangleright$ L13 $\triangleright$ L12 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' \neq 0$	;
L16:	Lem1.11c $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = 0$	;
L17:	L16 $\trianglerighteq$ L15 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = 0$	;
L18:	L17 $\trianglerighteq$ L07 $\gg$	$\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = 0$	;
L19:	Block $\gg$	End	;
L20:	Ded $\triangleright$ L19 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = 0$	;
L21:	Block $\gg$	End	;
L22:	Ded $\triangleright$ L21 $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = 0) \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = 0$	$\square$

[S **lemma** Prop 3.5d: $\Pi \mathcal{A}, \mathcal{B}\colon \mathcal{A} + \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = 0$]

S **proof of** Prop 3.5d:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Prop 3.5d$_1$ $\gg$	$x + 0 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge 0 = 0$	;
L04:	Prop 3.5d$_2$ $\gg$	$(x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0) \Rightarrow x + y' = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y' = 0$	;
L05:	S9 @ y $\triangleright$ L03 $\triangleright$ L04 $\gg$	$x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$	;
L06:	Block $\gg$	End	;
L07:	Ded $\triangleright$ L06 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = 0$	$\square$

6.7 3.5e

Her beviser vi at hvis en faktor i et produkt ikke er 0 og produktet er 0, så er den anden faktor 0. Beviset er ved induktion over x i Bx : $\mathrm{x} \neq 0 \Rightarrow (\mathrm{y} \cdot \mathrm{x} = 0 \Rightarrow \mathrm{y} = 0)$.

Basistilfældet:

[S **lemma** Prop 3.5e$_1$: $\Pi\mathcal{A}\colon 0 \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)$]

S **proof of** Prop 3.5e$_1$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L04:	Premise $\gg$	$0 \neq 0$	;
L05:	Prop 3.2a $\gg$	$0 = 0$	;
L06:	Lem1.11c $\gg$	$\neg(0 = 0) \Rightarrow ((0 = 0) \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0))$	;
L07:	L06 $\unrhd$ L04 $\gg$	$(0 = 0) \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)$	;
L08:	L07 $\unrhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0$	;
L09:	Block $\gg$	End	;
L10:	Ded $\rhd$ L09 $\gg$	$0 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0$	$\square$

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop 3.5e$_2$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\mathcal{B} \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)) \Rightarrow \mathcal{B}' \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)$]

S **proof of** Prop 3.5e$_2$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{B} \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)$	;
L05:	Block $\gg$	Begin	;
L06:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L07:	Premise $\gg$	$\mathcal{B}' \neq 0$	;
L08:	Block $\gg$	Begin	;
L09:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L10:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}' = 0$	;
L11:	S8 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}' = \mathcal{A}\cdot\mathcal{B} + \mathcal{A}$	;
L12:	S1 $\rhd$ L11 $\rhd$ L10 $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) + \mathcal{A} = 0$	;
L13:	Prop 3.5d $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) + \mathcal{A} = 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = 0 \wedge \mathcal{A} = 0$	;
L14:	L13 $\unrhd$ L12 $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = 0 \wedge \mathcal{A} = 0$	;
L15:	Con2 $\rhd$ L14 $\gg$	$\mathcal{A} = 0$	;
L16:	Block $\gg$	End	;
L17:	Ded $\rhd$ L16 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0$	;
L18:	Block $\gg$	End	;
L19:	Ded $\rhd$ L18 $\gg$	$\mathcal{B}' \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)$	;
L20:	Block $\gg$	End	;
L21:	Ded $\rhd$ L20 $\gg$	$(\mathcal{B} \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)) \Rightarrow \mathcal{B}' \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}' = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)$	$\square$

[S **lemma** Prop 3.5e: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{B} \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)$]

S **proof of** Prop 3.5e:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Prop 3.5e$_1$ ≫	$0 \neq 0 \Rightarrow (x\cdot 0 = 0 \Rightarrow x = 0)$	;
L04:	Prop 3.5e$_2$ ≫	$(y \neq 0 \Rightarrow (x\cdot y = 0 \Rightarrow x = 0)) \Rightarrow y' \neq 0 \Rightarrow (x\cdot y' = 0 \Rightarrow x = 0)$	;
L05:	S9 @ y ▷ L03 ▷ L04 ≫	$y \neq 0 \Rightarrow (x\cdot y = 0 \Rightarrow x = 0)$	;
L06:	Block ≫	End	;
L07:	Ded ▷ L06 ≫	$\mathcal{B} \neq 0 \Rightarrow (\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0)$	□

6.8 3.5f

Her beviser vi, at hvis en sum er $\overline{1}$, er netop 1 af addenderne $\overline{1}$ og den anden er $\overline{0}$. Bevist er ved induktion over y i B(y) : x + y = 1 ⇒ (x = 0 ∧ y = 1) ∨ (x = 1 ∧ y = 0)
Basistilfældet.

[S **lemma** Prop 3.5f$_1$: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} + 0 = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = 0 \wedge 0 = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge 0 = 0)$]

S **proof of** Prop 3.5f$_1$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A}$	;
L04:	Premise ≫	$\mathcal{A} + 0 = \overline{1}$	;
L05:	S5 ≫	$\mathcal{A} + 0 = \mathcal{A}$	;
L06:	S1 ▷ L05 ▷ L04 ≫	$\mathcal{A} = \overline{1}$	;
L07:	Prop 3.2a ≫	$0 = 0$	;
L08:	Con ▷ L06 ▷ L07 ≫	$\mathcal{A} = \overline{1} \wedge 0 = 0$	;
L09:	Dis2 ▷ L08 ≫	$(\mathcal{A} = 0 \wedge 0 = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge 0 = 0)$	;
L10:	Block ≫	End	;
L11:	Ded ▷ L10 ≫	$\mathcal{A} + 0 = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = 0 \wedge 0 = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge 0 = 0)$	□

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop 3.5f$_2$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\mathcal{A} + \mathcal{B} = \overline{1} \Rightarrow ((\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B} = 0))) \Rightarrow (\mathcal{A} + \mathcal{B}' = \overline{1} \Rightarrow ((\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B}' = 0)))$]

S **proof of** Prop 3.5f$_2$:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise ≫	$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \overline{1} \Rightarrow ((\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B} = 0))$	;
L05:	Block ≫	Begin	;

L06:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L07:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' = \overline{1}$	;
L08:	S6 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' = (\mathcal{A} + \mathcal{B})'$	;
L09:	S1 $\rhd$ L08 $\rhd$ L07 $\gg$	$(\mathcal{A} + \mathcal{B})' = \overline{1}$	;
L10:	S4 $\rhd$ L09 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B} = 0$	;
L11:	Prop 3.5d $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B} = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = 0$	;
L12:	L11 $\unrhd$ L10 $\gg$	$\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = 0$	;
L13:	Con1 $\rhd$ L12 $\gg$	$\mathcal{A} = 0$	;
L14:	Con2 $\rhd$ L12 $\gg$	$\mathcal{B} = 0$	;
L15:	S2 $\rhd$ L14 $\gg$	$\mathcal{B}' = \overline{1}$	;
L16:	Con $\rhd$ L13 $\rhd$ L15 $\gg$	$\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = \overline{1}$	;
L17:	Dis1 $\rhd$ L16 $\gg$	$(\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B}' = 0)$	;
L18:	Block $\gg$	End	;
L19:	Ded $\rhd$ L18 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B}' = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B}' = 0)$	;
L20:	Block $\gg$	End	;
L21:	Ded $\rhd$ L20 $\gg$	$(\mathcal{A}+\mathcal{B} = \overline{1} \Rightarrow ((\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B} = 0))) \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}' = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B}' = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B}' = 0)$	$\square$

[S **lemma** Prop 3.5f : $\Pi \mathcal{A}, \mathcal{B} \colon \mathcal{A} + \mathcal{B} = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B} = 0)$]

S **proof of** Prop 3.5f :

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Prop 3.5f$_1$ $\gg$	$x + 0 = \overline{1} \Rightarrow (x = 0 \wedge 0 = \overline{1}) \vee (x = \overline{1} \wedge 0 = 0)$	;
L04:	Prop 3.5f$_2$ $\gg$	$(x + y = \overline{1} \Rightarrow ((x = 0 \wedge y = \overline{1}) \vee (x = \overline{1} \wedge y = 0))) \Rightarrow x + y' = \overline{1} \Rightarrow (x = 0 \wedge y' = \overline{1}) \vee (x = \overline{1} \wedge y' = 0)$	;
L05:	S9 @ y $\rhd$ L03 $\rhd$ L04 $\gg$	$x + y = \overline{1} \Rightarrow ((x = 0 \wedge y = \overline{1}) \vee (x = \overline{1} \wedge y = 0))$	;
L06:	Block $\gg$	End	;
L07:	Ded $\rhd$ L06 $\gg$	$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = 0 \wedge \mathcal{B} = \overline{1}) \vee (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B} = 0)$	$\square$

6.9 3.5g

Her viser vi, at hvis et produkt er $\overline{1}$ er begge faktore $\overline{1}$. Beviset er ved induktion over y i B(y) : x · y = $\overline{1}$ ⇒ (x = $\overline{1}$) ∧ (y = $\overline{1}$).
Basistilfældet:

[S **lemma** Prop 3.5g$_1$: $\Pi \mathcal{A} \colon \mathcal{A} \cdot 0 = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1}) \wedge (0 = \overline{1})$]

S **proof of** Prop 3.5g_1:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \cdot 0 = \overline{1}$	;
L05:	S7 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot 0 = 0$	;
L06:	S1 $\rhd$ L05 $\rhd$ L04 $\gg$	$0 = \overline{1}$	;
L07:	S3 $\gg$	$0 \neq \overline{1}$	;
L08:	Lem1.11c $\gg$	$\neg(0 = \overline{1}) \Rightarrow ((0 = \overline{1}) \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge 0 = \overline{1}))$	;
L09:	L08 $\unrhd$ L07 $\gg$	$(0 = \overline{1}) \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge 0 = \overline{1})$	;
L10:	L09 $\unrhd$ L06 $\gg$	$(\mathcal{A} = \overline{1} \wedge 0 = \overline{1})$	;
L11:	Block $\gg$	End	;
L12:	Ded $\rhd$ L11 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot 0 = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge 0 = \overline{1})$	$\square$

[S **lemma** Prop 3.5g_2: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}$: $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 0 \wedge \mathcal{A} = \overline{1}) \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B}' = \overline{1})$]

S **proof of** Prop 3.5g_2:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 0 \wedge \mathcal{A} = \overline{1}$	;
L05:	Con2 $\rhd$ L04 $\gg$	$\mathcal{A} = \overline{1}$	;
L06:	Con1 $\rhd$ L04 $\gg$	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 0$	;
L07:	S3 $\gg$	$0 \neq \overline{1}$	;
L08:	H10 $\rhd$ L07 $\gg$	$\overline{1} \neq 0$	;
L09:	S1'' $\gg$	$\mathcal{A} = \overline{1} \Rightarrow \mathcal{A} = 0 \Rightarrow \overline{1} = 0$	;
L10:	H3 $\rhd$ L09 $\rhd$ L05 $\rhd$ L08 $\gg$	$\mathcal{A} \neq 0$	;
L11:	Prop 3.2n $\gg$	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$	;
L12:	S1 $\rhd$ L11 $\rhd$ L06 $\gg$	$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = 0$	;
L13:	Prop 3.5e $\gg$	$\mathcal{A} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = 0 \Rightarrow \mathcal{B} = 0$	;
L14:	L13 $\unrhd$ L10 $\gg$	$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = 0 \Rightarrow \mathcal{B} = 0$	;
L15:	L14 $\unrhd$ L12 $\gg$	$\mathcal{B} = 0$	;
L16:	S2 $\rhd$ L15 $\gg$	$\mathcal{B}' = \overline{1}$	;
L17:	Con $\rhd$ L05 $\rhd$ L16 $\gg$	$\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B}' = \overline{1}$	;
L18:	Block $\gg$	End	;
L19:	Ded $\rhd$ L18 $\gg$	$(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 0 \wedge \mathcal{A} = \overline{1}) \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B}' = \overline{1})$	$\square$

[S **lemma** Prop 3.5g_3: $\Pi\mathcal{A}, \mathcal{B}$: $(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B} = \overline{1})) \vdash (\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \overline{1} \wedge \mathcal{A} = 0) \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B}' = \overline{1})$]

S **proof of** Prop 3.5g_3:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B} = \overline{1})$	;
L03:	Block $\gg$	Begin	;
L04:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;

L05:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\wedge\mathcal{A}=0$	;
L06:	Con1 $\rhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}$	;
L07:	L02 $\unrhd$ L06 $\gg$	$(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}=\overline{1})$	;
L08:	Con1 $\rhd$ L07 $\gg$	$\mathcal{A}=\overline{1}$	;
L09:	Con2 $\rhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{A}=0$	;
L10:	S1 $\rhd$ L09 $\rhd$ L08 $\gg$	$0=\overline{1}$	;
L11:	S3 $\gg$	$0\neq\overline{1}$	;
L12:	Lem1.11c $\gg$	$0\neq\overline{1}\Rightarrow((0=\overline{1})\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1}))$	;
L13:	L12 $\unrhd$ L11 $\gg$	$(0=\overline{1})\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1})$	;
L14:	L13 $\unrhd$ L10 $\gg$	$(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1})$	;
L15:	Block $\gg$	End	;
L16:	Ded $\rhd$ L15 $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\wedge\mathcal{A}=0)\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1})$	$\square$

Det induktive trin:

[S **lemma** Prop 3.5g$_4$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}$: $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}=\overline{1}))\Rightarrow(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}'=\overline{1}\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1}))$]

S **proof of** Prop 3.5g$_4$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}=\overline{1})$	;
L05:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}'=\overline{1}$	;
L06:	S8 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}'=\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}$	;
L07:	S1 $\rhd$ L06 $\rhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}=\overline{1}$	;
L08:	Prop 3.5f $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}+\mathcal{A}=\overline{1})\Rightarrow(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=0\wedge\mathcal{A}=\overline{1})\vee(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\wedge\mathcal{A}=0)$	;
L09:	L08 $\unrhd$ L07 $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=0\wedge\mathcal{A}=\overline{1})\vee(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\wedge\mathcal{A}=0)$	;
L10:	Prop 3.5g$_2$ $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=0\wedge\mathcal{A}=\overline{1})\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1})$	;
L11:	Prop 3.5g$_3$ $\rhd$ L04 $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\wedge\mathcal{A}=0)\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1})$	;
L12:	H11 $\rhd$ L09 $\rhd$ L10 $\rhd$ L11 $\gg$	$\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1}$	;
L13:	Block $\gg$	End	;
L14:	Ded $\rhd$ L13 $\gg$	$(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}=\overline{1}))\Rightarrow\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}'=\overline{1}\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}'=\overline{1})$	$\square$

[S **lemma** Prop 3.5g: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}$: $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}=\overline{1}\Rightarrow(\mathcal{A}=\overline{1}\wedge\mathcal{B}=\overline{1})$]

S **proof of** Prop 3.5g:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Prop 3.5g$_1$ $\gg$	$x\cdot 0=\overline{1}\Rightarrow(x=\overline{1}\wedge 0=\overline{1})$	;

L04:	Prop 3.5g$_4$ ≫	$(x \cdot y = \overline{1} \Rightarrow (x = \overline{1} \wedge y = \overline{1})) \Rightarrow (x \cdot y' = \overline{1} \Rightarrow (x = \overline{1} \wedge y' = \overline{1}))$	;
L05:	S9 @ y ▷ L03 ▷ L04 ≫	$x \cdot y = \overline{1} \Rightarrow (x = \overline{1} \wedge y = \overline{1})$	;
L06:	Block ≫	End	;
L07:	Ded ▷ L06 ≫	$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \overline{1} \Rightarrow (\mathcal{A} = \overline{1} \wedge \mathcal{B} = \overline{1})$	□

6.10 3.5h

[S **lemma** Prop 3.5h: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \neq 0 \Rightarrow \exists\mathcal{B}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B}'$]

Beviset for 3.5.h ville i pyk have set ud nogenlunde som følgende:

$$t \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(t = y')$$

Part I

$L01$	*premise*	$0 \neq 0$
$L02$	*abbr.* $L01$	$\neg(0 = 0)$
$L03$	$3.2.a$	$0 = 0$
$L04$	*Lemma* $1.11.c$	$\neg(0 = 0) \Rightarrow ((0 = 0) \Rightarrow (\exists w)(0 = w'))$
$L05$	$MP, L02, L03$	$(\exists w)(0 = w')$
$L06$	$Ded, L05$	$(0 \neq 0) \Rightarrow (\exists w)(0 = w')$

Part II

$L01:$	*premise*	$(x \neq 0) \Rightarrow (\exists w)(x = w')$
$L02:$	$S3'$	$x' \neq 0$
$L03:$	$Taut.:\ \mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$	$(x = 0) \vee \neg(x = 0)$
$L04:$	*premise*	$(x = 0)$
$L05:$	$S2'$	$0' = x'$
$L06:$	$E4$	$(x = 0) \Rightarrow (\exists w)(x' = w')$
$L07:$	*premise*	$\neg(x = 0)$
$L08:$	$MP, L01, L07$	$(\exists w)(x = w')$
$L09:$	*rulec*	$x = b'$
$L10:$	$S2'$	$(\exists w)(x' = w')$
$L11:$	$E4$	$\neg(x = 0) \Rightarrow (\exists w)(x' = w')$
$L12$	*Lemma* $H11, L06.L11$	$(x' \neq 0) \Rightarrow (\exists w)(x' = w')$

Tilbage er blot at bruge sætning S9 for at fuldende induktionsbeviset.

7 Udsagn 3.7

Vi har kun lavet de indledende definitioner, da hele 3.7 kræver “existential rule”.

7.1 Definitioner af $x < y$

Vi har makrodefineret følgende definitioner:

$[\mathsf{x} < \mathsf{y} \stackrel{..}{=} \exists \mathsf{z} \colon (\mathsf{z} \neq 0 \wedge \mathsf{z} + \mathsf{x} = \mathsf{y})]$
$[\mathsf{x} \leq \mathsf{y} \stackrel{..}{=} \mathsf{x} < \mathsf{y} \vee \mathsf{x} = \mathsf{y}]$
$[\mathsf{x} > \mathsf{y} \stackrel{..}{=} \mathsf{y} < \mathsf{x}]$
$[\mathsf{x} \geq \mathsf{y} \stackrel{..}{=} \mathsf{y} \leq \mathsf{x}]$
$[\mathsf{x} \not< \mathsf{y} \stackrel{..}{=} \neg(\mathsf{x} < \mathsf{y})]$
$[\mathsf{x} \not> \mathsf{y} \stackrel{..}{=} \mathsf{y} \not< \mathsf{x}]$
$[\mathsf{x} \mid \mathsf{y} \stackrel{..}{=} \exists \mathsf{z} \colon \mathsf{y} = \mathsf{x} \cdot \mathsf{z}]$

Ved hjælp af disse definitioner og “existential rule” ville 3.7 kunne bevises.

A Hjælpelemmaer

Til flere af vores beviser har vi brug for nogle hjælpe-lemmaer, disse er bevist i det følgende afsnit

A.1 Liste over hjælpelemmaer

[S **lemma** Lem1.11c: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \neg\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$]

[S **lemma** Cor1.10a: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$]

[S **lemma** Cor1.10b: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$]

[S **lemma** Lem1.11a: $\Pi\mathcal{A}\colon \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$]

[S **lemma** Lem1.11b: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$]

[S **lemma** Prop3.2c$'$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C}$]

[S **lemma** S1$''$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C}$]

[S **lemma** Neg$'$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$]

[S **lemma** Repetition$'$: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$]

[S **lemma** Lem1.11e: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$]

[S **lemma** Lem1.11d: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$]

[S **lemma** Prop3.2b$'$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}$]

[S **lemma** H10: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{B} \neq \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$]

[S **lemma** H11: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{C}$]

[S **lemma** Lem1.11g: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash \mathcal{B}$]

[S **lemma** MT: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash \neg\mathcal{B} \vdash \neg\mathcal{A}$]

A.2 Beviser for hjælpelemmaer

[S **lemma** Lem1.11c: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \neg\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$]

S **proof of** Lem1.11c:

L01:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block ≫	Begin	;
L03:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise ≫	$\neg\mathcal{A}$	;
L05:	Block ≫	Begin	;
L06:	Arbitrary ≫	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L07:	Premise ≫	$\mathcal{A}$	;

L08:	Repetition $\triangleright$ L04 $\gg$	$\quad\neg\mathcal{A}$	;
L09:	A1$'$ $\gg$	$\quad\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$	;
L10:	L09 $\trianglerighteq$ L07 $\gg$	$\quad\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	;
L11:	A1$'$ $\gg$	$\quad\neg\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$	;
L12:	L11 $\trianglerighteq$ L08 $\gg$	$\quad\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L13:	Neg $\triangleright$ L12 $\triangleright$ L10 $\gg$	$\quad\mathcal{B}$	;
L14:	Block $\gg$	End	;
L15:	Ded $\triangleright$ L14 $\gg$	$\quad\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L16:	Block $\gg$	End	;
L17:	Ded $\triangleright$ L16 $\gg$	$\neg\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\square$

[S **lemma** Cor1.10a: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$]

S **proof of** Cor1.10a:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L03:	Premise $\gg$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L04:	Block $\gg$	Begin	;
L05:	Arbitrary $\gg$	$\quad\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L06:	Premise $\gg$	$\quad\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L07:	Premise $\gg$	$\quad\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L08:	Premise $\gg$	$\quad\mathcal{A}$	;
L09:	L06 $\trianglerighteq$ L08 $\gg$	$\quad\mathcal{B}$	;
L10:	L07 $\trianglerighteq$ L09 $\gg$	$\quad\mathcal{C}$	;
L11:	Block $\gg$	End	;
L12:	Ded $\triangleright$ L11 $\gg$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L13:	L12 $\trianglerighteq$ L02 $\gg$	$(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L14:	L13 $\trianglerighteq$ L03 $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	$\square$

[S **lemma** Cor1.10b: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \vdash \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$]

S **proof of** Cor1.10b:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L03:	Premise $\gg$	$\mathcal{B}$	;
L04:	A2$'$ $\gg$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L05:	L04 $\trianglerighteq$ L02 $\gg$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L06:	A1$'$ $\gg$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L07:	L06 $\trianglerighteq$ L03 $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L08:	L05 $\trianglerighteq$ L07 $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	$\square$

[S **lemma** Lem1.11a: $\Pi\mathcal{A}\colon \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$]

S **proof of** Lem1.11a:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	Neg$'$ $\gg$	$(\neg(\mathcal{A}) \Rightarrow \neg(\neg\mathcal{A})) \Rightarrow ((\neg(\mathcal{A}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A})) \Rightarrow \mathcal{A})$	;

L03:	Repetition′ $\gg$	$\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L04:	Cor1.10b $\rhd$ L02 $\rhd$ L03 $\gg$	$(\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg(\neg\mathcal{A})) \Rightarrow \mathcal{A}$	;
L05:	A1′ $\gg$	$\neg(\neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg(\neg\mathcal{A}))$	;
L06:	Cor1.10a $\rhd$ L05 $\rhd$ L04 $\gg$	$\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	$\square$

[S **lemma** Lem1.11b: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$]

S **proof of** Lem1.11b:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	Neg′ $\gg$	$(\neg\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A})$	;
L03:	Lem1.11a $\gg$	$\neg\neg(\neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A})$	;
L04:	L02 $\trianglerighteq$ L03 $\gg$	$(\neg\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$	;
L05:	A1′ $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A})$	;
L06:	Cor1.10a $\rhd$ L05 $\rhd$ L04 $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$	$\square$

[S **lemma** Prop3.2c′: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C}$]

S **proof of** Prop3.2c′:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B}$	;
L05:	Block $\gg$	Begin	;
L06:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L07:	Premise $\gg$	$\mathcal{B} = \mathcal{C}$	;
L08:	Prop 3.2c $\rhd$ L04 $\rhd$ L07 $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{C}$	;
L09:	Block $\gg$	End	;
L10:	Ded $\rhd$ L09 $\gg$	$\mathcal{B} = \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C}$	;
L11:	Block $\gg$	End	;
L12:	Ded $\rhd$ L11 $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C}$	$\square$

[S **lemma** S1″: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C}$]

S **proof of** S1″:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B}$	;
L05:	Block $\gg$	Begin	;
L06:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$	;
L07:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{C}$	;
L08:	S1 $\rhd$ L04 $\rhd$ L07 $\gg$	$\mathcal{B} = \mathcal{C}$	;
L09:	Block $\gg$	End	;
L10:	Ded $\rhd$ L09 $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C}$	;
L11:	Block $\gg$	End	;
L12:	Ded $\rhd$ L11 $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{C}$	$\square$

[S **lemma** Neg′: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$]

S **proof of** Neg′:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L05:	Block $\gg$	Begin	;
L06:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L07:	Premise $\gg$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	;
L08:	Neg $\rhd$ L04 $\rhd$ L07 $\gg$	$\mathcal{B}$	;
L09:	Block $\gg$	End	;
L10:	Ded $\rhd$ L09 $\gg$	$(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L11:	Block $\gg$	End	;
L12:	Ded $\rhd$ L11 $\gg$	$(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$	$\square$

[S **lemma** Repetition′: $\Pi\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$]

S **proof of** Repetition′:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L05:	Repetition $\rhd$ L04 $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L06:	Block $\gg$	End	;
L07:	Ded $\rhd$ L06 $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	$\square$

[S **lemma** H10: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{B} \neq \mathcal{A} \vdash \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$]

S **proof of** H10:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$	;
L03:	Prop3.2b′ $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}$	;
L04:	Lem1.11e $\gg$	$(\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B} \neq \mathcal{A} \Rightarrow$ $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$	;
L05:	L04 $\trianglerighteq$ L03 $\gg$	$\mathcal{B} \neq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$	;
L06:	L05 $\trianglerighteq$ L02 $\gg$	$\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$	$\square$

[S **lemma** MT: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash \neg\mathcal{B} \vdash \neg\mathcal{A}$]

S **proof of** MT:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L03:	Premise $\gg$	$\neg\mathcal{B}$	;
L04:	Lem1.11a $\gg$	$\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	;
L05:	Cor1.10a $\rhd$ L04 $\rhd$ L02 $\gg$	$\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L06:	Block $\gg$	Begin	;
L07:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;

L08:	Premise $\gg$	$\quad\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L09:	Premise $\gg$	$\quad\neg\mathcal{B}$	;
L10:	A1$'$ $\gg$	$\quad\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}$	;
L11:	L10 $\trianglerighteq$ L09 $\gg$	$\quad\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}$	;
L12:	Neg $\triangleright$ L11 $\triangleright$ L08 $\gg$	$\quad\neg\mathcal{A}$	;
L13:	Block $\gg$	End	;
L14:	Ded $\triangleright$ L13 $\gg$	$(\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L15:	L14 $\trianglerighteq$ L05 $\gg$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L16:	L15 $\trianglerighteq$ L03 $\gg$	$\neg\mathcal{A}$	$\square$

[S **lemma** Lem1.11e: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$]

S **proof of** Lem1.11e:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\quad\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\quad\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L05:	Lem1.11a $\gg$	$\quad\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$	;
L06:	Cor1.10a $\triangleright$ L05 $\triangleright$ L04 $\gg$	$\quad\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L07:	Lem1.11b $\gg$	$\quad\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$	;
L08:	Cor1.10a $\triangleright$ L06 $\triangleright$ L07 $\gg$	$\quad\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}$	;
L09:	Lem1.11d $\gg$	$\quad(\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L10:	L09 $\trianglerighteq$ L08 $\gg$	$\quad\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L11:	Block $\gg$	End	;
L12:	Ded $\triangleright$ L11 $\gg$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	$\square$

[S **lemma** Lem1.11d: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$]

S **proof of** Lem1.11d:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\quad\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\quad\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L05:	Neg$'$ $\gg$	$\quad(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B})$	;
L06:	A1$'$ $\gg$	$\quad\mathcal{A} \Rightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$	;
L07:	L05 $\trianglerighteq$ L04 $\gg$	$\quad(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L08:	Cor1.10a $\triangleright$ L06 $\triangleright$ L07 $\gg$	$\quad\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L09:	Block $\gg$	End	;
L10:	Ded $\triangleright$ L09 $\gg$	$(\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$	$\square$

[S **lemma** Prop3.2b$'$: $\Pi\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}$]

S **proof of** Prop3.2b$'$:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L02:	Block $\gg$	Begin	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\quad\mathcal{A},\mathcal{B}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\quad\mathcal{A} = \mathcal{B}$	;

L05:	Prop 3.2b $\rhd$ L04 $\gg$	$\quad\mathcal{B} = \mathcal{A}$	;
L06:	Block $\gg$	End	;
L07:	Ded $\rhd$ L06 $\gg$	$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}$	$\square$

[S **lemma** Lem1.11g: $\Pi \mathcal{A}, \mathcal{B}$: $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash (\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vdash \mathcal{B}$]

S **proof of** Lem1.11g:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L03:	Premise $\gg$	$\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	;
L04:	Lem1.11e $\gg$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L05:	L04 $\unrhd$ L02 $\gg$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	;
L06:	Lem1.11e $\gg$	$(\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$	;
L07:	L06 $\unrhd$ L03 $\gg$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$	;
L08:	Neg $\rhd$ L07 $\rhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{B}$	$\square$

[S **lemma** H11: $\Pi \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{C}$]

S **proof of** H11:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	;
L02:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	;
L03:	Premise $\gg$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L05:	Cor1.10a $\rhd$ L02 $\rhd$ L04 $\gg$	$\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	;
L06:	Lem1.11g $\rhd$ L03 $\rhd$ L05 $\gg$	$\mathcal{C}$	$\square$

Litteratur

[Gru06] K. Grue. A logiweb base page. Technical report, Logiweb, 2006. http://www.diku.dk/cgi-bin/cginetd/grue/relay/go/01693B66F0C393B695F3F15770898897A683141109C083AC838ADCA20806/2/.

[Men97] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Chapmann & Hall, 4. edition, 1997.