

# Logik Rapport

Holger Bock Axelsen  
Michael Kirkedal Thomsen

GRD-2005-07-04.UTC:21:57:57.981341

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduktion til Logiweb</b>	<b>3</b>
1.1	Logiweb-siden . . . . .	3
1.2	Denne Logiweb side. . . . .	4
1.2.1	Opsætning af beviser. . . . .	4
1.3	Hvorfor benytte Logiweb? . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Peano-aritmetik</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Hypotetisk deduktion</b>	<b>8</b>
3.1	Forkortende notation . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Beviser</b>	<b>11</b>
4.1	Tautologier . . . . .	11
4.2	Beviser for hovedlemmaer . . . . .	12
4.2.1	Bevis for <i>Mendelson 3.2(a)</i> . . . . .	12
4.2.2	Bevis for <i>Mendelson 3.2(b)</i> . . . . .	12
4.2.3	Bevis for <i>Mendelson 3.2(c)</i> . . . . .	12
4.2.4	Bevis for <i>Mendelson 3.2(d)</i> . . . . .	13
4.3	Induktive beviser for resterende hovedlemmaer . . . . .	13
4.3.1	Bevis for <i>Mendelson 3.2(f)</i> . . . . .	13
4.3.2	Bevis for <i>Mendelson 3.2(g)</i> . . . . .	14
4.3.3	Bevis for <i>Mendelson 3.2(h)</i> . . . . .	15
<b>A</b>	<b>Regellemmaer og hypotetiske lemnaer</b>	<b>17</b>
A.1	$S6'$ som hypotetisk lemma . . . . .	17
A.2	<i>Mendelson 3.2(b)</i> som regellemma . . . . .	17
A.3	<i>Mendelson 3.2(c)</i> som regellemma . . . . .	17
A.4	<i>Mendelson 3.2(c)</i> som hypotetisk regellemma . . . . .	18
A.5	<i>Mendelson 3.2(d)</i> som regellemma . . . . .	18
A.6	<i>Mendelson 3.2(d)</i> som hypotetisk regellemma . . . . .	19
<b>B</b>	<b>Specialicerede lemnaer</b>	<b>19</b>
B.1	<i>Mendelson 3.2(f)</i> specialiseret . . . . .	19
B.2	<i>Mendelson 3.2(g)</i> specialiseret og hypotiseret. . . . .	19
<b>C</b>	<b>Litteraturliste</b>	<b>21</b>

# 1 Introduktion til Logiweb

Denne rapport er skrevet med henblik på publikation i Logiweb-systemet, og er hvad der kaldes en Logiweb-*side*. Logiweb er ikke kun lavet for at kunne fremvise rapporter og matematiske formler på en pæn måde<sup>1</sup>; Logiweb skal også kunne forstå (dele af) den matematik, der bliver skrevet på siden. Med denne forståelse gives der mulighed for at definere en bevischecker og køre programmer, som defineret på Logiweb sider, og formelt verificere korrekthed. Logiweb-sider kan også publiceres på en Logiweb-server, så andre nemt kan henvise til siden og benytte beviser og lignende fra publicerede sider på en nem, men formel og korrekt måde.

## 1.1 Logiweb-siden

Til at generere Logiweb sider er der designet et sprog kaldet *pyk*, der på mange måder minder om andre mark-up sprog: Først defineres sidens navn, derefter de sider der refereres til, og bagefter de *pyk*-konstruktioner, der benyttes på siden (også dem som er defineret på referencesider). En konstruktion kan være alt fra formler og relationer til variabler og programmer. Alle konstruktioner introduceres med en *pyk*-(reference) og en *tex*-definition af deres udseende på papiret. Dette er et eksempel på forskellige *aspekter* af den samme konstruktion, et begreb der er meget vigtigt for *pyk*-compileren: F.eks. vil *pyk*-aspektet af en definition blive brugt i den formelle verifikation af en side, og *tex*-aspektet blive brugt i generering af den læsbare tekst.

Vi bruger altså en *pyk*-compiler i samarbejde med en Logiweb-server til at få en reel Logiweb-side. En *pyk*-kildetekst består således groft sagt af nogle sætninger og beviser skrevet i *pyk* sammensat med brødtekst, der skal være formateret i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X kode. Udseendet af den formelle matematik og Logiwebs forståelse af dem afhænger af de konstruktioner der er defineret på siden og i bibliografien. For den formelle verifikation af matematikken skal *pyk*-konstruktioner altså benyttes.

Som uddata giver Logiweb-serveren et system af html-sider, tilgængeligt via internettet, med følgende indhold:

- *Reference* - Unik reference til siden så andre kan benytte indholdet.
- *Vector* - Den del af en Logiweb side der bliver indlæst af andre sider.
- *Body* - Selve siden i "papir". Denne rapport er *body* til denne Logiweb side.
- *Bibliography* - Liste med de Logiweb-sider som siden refererer til, inkl. siden selv.
- *Dictionary* - Liste med alle Logiweb-konstruktioner der er introduceret på siden.

---

<sup>1</sup>Der er mange systemer der er god til at fremvise rapporter og især matematiske formler. T<sub>E</sub>X (og herunder L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X) er et meget godt eksempel herpå.

- *Codex* - Liste med alt som er defineret på denne side, samt deres definitioner.
- *Expansion* - Version af *body* som er makro ekspanderet fuldt ud.
- *Diagnose* - Hvis matematikken ikke kunne verificeres gives her en fejlmeddelelse.
- *Source* - Sidens kildekode (i *pyk*).

Indholdet i hvert af afsnittene (undtagen *Source*, som er den rå *pyk* kode-tekst) kan ses i en række formater, bl.a. PDF<sup>2</sup>.

For den interesserede læser er der (meget) mere om Logiweb i (base reference) – det vigtigste at få ud af den meget korte introduktion til Logiweb ovenfor er at sider publiceret i Logiweb-systemet er checket af en automatisk bevisechecker (der i sig selv er defineret i *pyk*).

## 1.2 Denne Logiweb side.

Til eksempel kan vi gennemgå denne side i Logiweb-forstand:

Denne Logiweb side hedder [HMpeano]<sup>3</sup>. I fodnoten ses den først introduktion på denne side, som er en *pyk*-definition af selve siden.

Denne sides bibliografi er bestemt af referencen til to andre sider:

- **base**<sup>4</sup> - indeholder bevisechecker, makroudfoldelse, aritmetik og meget mere.
- **peano**<sup>5</sup> - definerer Peano aritmetik som benyttes på denne side.

Dens Logiweb homepage er

<http://www.diku.dk/~grue/logiweb/20050502/home/funkstar/hmpeano>

Dens kana reference er

```
nani
suki tana kenu tatu nanu   sena keka nasa kani suti
nane kutu tuna keka tasi   keka tusi kise nina sesu
siki kasi kusu sita sine   saku sika nasa natu
```

### 1.2.1 Opsætning af beviser.

Opsætningen af beviser og definitioner bliver fastlagt på Logiweb-siderne selv – i vores tilfælde benytter vi bevis-konstruktet fra [1]. Men alle lemmaer på siden skal introduceres, defineres og bevises. Læg mærke til at papiropsætningen, *tex*-aspektet, er uafhængigt af bevis-checkeren. Således kan et bevis være forkert,

---

<sup>2</sup>Portable Document Format

<sup>3</sup>[HMpeano <sup>pyk</sup> “hmpeano”]

<sup>4</sup>Se [1].

<sup>5</sup>Se [2].

men sat op på samme måde som andre beviser. Kun ved at konsultere Logiweb-systemet kan man reelt verificere at beviset er korrekt<sup>6</sup>.

Et bevis vil på denne side fremstå som en række linier, der definerer argumentationen for beviset. Et eksempel på et bevis is systemet System for propositionen Lemma ser således ud:

System **proof of** Lemma:

L01: Argument $\gg$	Konklusion	;
L02: Keyword $\gg$	Formel/Term	$\square$

Et Argument kan være et axiom eller et lemma, og inkludere linienumre, variable eller andre konstruktioner i argumentationen, og en formel understøttet af denne argumentation kan skrives som Konklusion (en sand formel, givet forudsætningerne for beviset). Mao. er opsætningen *ikke* tænkt som i en bevis-assistent, der generer en formel ud fra en given argumentation, men som linier med tilhørende argumentation. Dette svarer også til *pyk*-koden, og formatet brugt i (Mendelson reference). Argumenter har udformning som følgende eksempel,  $MP \triangleright L_a \triangleright L_b$ , der skal forstås på den måde at Lemma/Axiom MP benyttet med linierne  $L_a$  og  $L_b$  som præmisses, understøtter den givne konklusion. Den eneste anden form for argumentation vil vi se i denne rapport, er  $A4' @ \dot{x}$  der siger at  $A4'$ 's substitutions variabel (meta-kvantiseret som  $\mathcal{X}$ ) er  $\dot{x}$  i konklusionen.

Et Keyword er et de følgende fire:

- Arbitrary, hvor konklusionen er en meta-variabel (skrevet med kalligrafisk skrifttype). Hvad meta-variablen rangerer over (formler, termer, Peano variable) vil være klart af konteksten. Hvis vi har introduceret en variabel som Arbitrary, vil en konklusion automatisk være generaliseret (med alkvantoren  $\forall$ ).
- Premise, hvor konklusion er en af de givne præmisses.
- Side-condition, hvor konklusionen er en given sidebetingelse.
- Local, hvor konklusion er bindingen af en frisk meta-variabel til en given formel/term.

Vi vil ikke direkte benytte Side-condition, men bemærker at der er forskel på at kræve noget som side-betingelse i forhold til at kræve det som præmis: I Peano aritmetik, som defineret nedenfor, har flere af axiomerne side-betingelser.

Endelig vil den sidste linie i beviset være afsluttet med  $\square$  (klassisk forkortelse for *quod erat demonstrandum*), og konklusionen vil være identisk med Lemmaets proposition.

---

<sup>6</sup>Med det caveat at beviset skal være genereret ud fra et *pyk*-bevis. Med  $\LaTeX$  kan man naturligvis emulere de generede beviser, hvorfor skeptikeren bør inspicere kildekoden.

### 1.3 Hvorfor benytte Logiweb?

Denne rapport er som betingelse skrevet i Logiweb, men det er ikke svært at se Logiwebs styrker:

- Globalt. Sider publiceret på Logiweb er tilgængelige for alle, hvilket motiverer kode-delning, og fælles udvikling.
- Modulært. Sider (som) denne kan opbygges af eksisterende bestande.
- Selvindeholdt. Selvom vi har benyttet grunddefinitioner fra en bestemt side, er dette ikke mandatorisk, og andre formuleringer kan tænkes.
- Pænt. For læseren genereres et læsbart stykke tekst der svarer til de formelle definitioner.
- Frit. Næsten alt kan tilpasses, og specielle konstruktioner kan introduceres efter behov.

## 2 Peano-aritmetik

Det logiske system system vi benytter er Peano aritmetik (PA), som defineret i systemet  $S'$  defineret på siden [2], svarende til Mendelson Lemma 3.1. Vi giver her en kort gennemgang af dette system, og henviser læseren til [2] for yderligere detaljer.

PA termer og formler er opbygget af en række konstruktorer, beskrevet ved følgende BNF:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &::= \dot{0} \mid \mathcal{T}' \mid \mathcal{T} \dot{+} \mathcal{T} \mid \mathcal{T} : \mathcal{T} \mid \mathcal{X} \\ \mathcal{F} &::= \mathcal{T} \stackrel{P}{=} \mathcal{T} \mid \dot{\neg} \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \dot{\Rightarrow} \mathcal{F} \mid \dot{\forall} \mathcal{X} : \mathcal{F} \\ \mathcal{X} &::= \dot{x} \end{aligned}$$

hvor  $\dot{x}$  er navnet på en konkret Peano variabel. Tilgængelige navne er  $\dot{a}$  til  $\dot{z}$ . De resterende logiske konnektiver kan defineret ud fra de her givne, hvilket er gjort i [2], men i denne rapport er de originale konstruktioner nok. Når vi skriver formler i PA bruges præcedens regler til at udflade syntakstræet, og eliminere parenteser. De brugte operatører i denne rapport har præcedensorden  $\dot{\Rightarrow}$ ,  $\dot{\forall}$ ,  $\dot{+}$ ,  $'$ , hvor  $'$  binder stærkest. Til forskel fra Mendelson er  $\dot{\Rightarrow}$  højreassosiativ.

Til formel ræsonering om PA termer og formler har vi brug for aksiomer og inferensregler.

[Theory  $S'$ ]

[ $S'$  rule A1':  $\forall \mathcal{A} : \forall \mathcal{B} : \mathcal{A} \dot{\Rightarrow} \mathcal{B} \dot{\Rightarrow} \mathcal{A}$ ]

[ $S'$  rule A2':  $\forall \mathcal{A} : \forall \mathcal{B} : \forall \mathcal{C} : (\mathcal{A} \dot{\Rightarrow} \mathcal{B} \dot{\Rightarrow} \mathcal{C}) \dot{\Rightarrow} (\mathcal{A} \dot{\Rightarrow} \mathcal{B}) \dot{\Rightarrow} \mathcal{A} \dot{\Rightarrow} \mathcal{C}$ ]

$$[S' \text{ rule A3'}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: (\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}) \Rightarrow (\neg \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{B}]$$

$$[S' \text{ rule A4'}: \forall \mathcal{C}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{X}: \forall \mathcal{B}: [\mathcal{A}] \equiv \langle [\mathcal{B}] \mid [\mathcal{X}] \rangle := [\mathcal{C}] \vdash \dot{\forall} \mathcal{X}: \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}]$$

$$[S' \text{ rule A5'}: \forall \mathcal{X}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \text{nonfree}([\mathcal{X}], [\mathcal{A}]) \vdash \dot{\forall} \mathcal{X}: (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow \dot{\forall} \mathcal{X}: \mathcal{B}]$$

A1' til A5' er de velkendte aksiomer for første ordens prædikat-kalkyle (Mendelson, s.69). Bemærk formalisering af Mendelsons "free for" begreb i sidebetingelserne for A4' og A5':  $[\mathcal{A}] \equiv \langle [\mathcal{B}] \mid [\mathcal{X}] \rangle := [\mathcal{C}]$  betyder at  $\mathcal{A}$  er syntaktisk ækvivalent med  $\mathcal{B}$  hvor alle frie forekomster af  $\mathcal{X}$  er substitueret med  $\mathcal{C}$ .  $\text{nonfree}([\mathcal{X}], [\mathcal{A}])$  betyder det oplagte:  $\mathcal{A}$  indeholder ingen frie forekomster af  $\mathcal{X}$ . Den præcise formalisering som disse konstrukter dækker over kan ses på siden (peano reference).

Det er desuden vigtigt at bemærke forskellen på kvantisering over formler (well-forms) hvor notationen benytter den almindelige al-kvantor, og kvantisering over Peano variable, hvor notationen benytter en al-kvantor med en prik,  $\dot{\forall}$ . I PA er disse to distinkte konstruktioner. Dette vil være relevant senere i rapporten, men det allerede nu burde konventionen være klar: Variable med prik er Peano variable, konstruktioner (funktioner, relationer) med en prik er Peano konstruktioner. Logiweb-systemet har ingen intrinsisk viden om semantikken for disse konstruktioner, dvs. vil man argumentere med f.eks. DeMorgans love, skal disse formuleres med de tilsvarende Peano konstruktioner og bevises vha. ovenstående aksiomer. Mao. er Logiweb-systemet syntaktisk.

$$[S' \text{ rule MP'}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}]$$

$$[S' \text{ rule Gen'}: \forall \mathcal{X}: \forall \mathcal{A}: \mathcal{A} \vdash \dot{\forall} \mathcal{X}: \mathcal{A}]$$

Disse er de velkendte inferensregler, *modus ponens* og *generalisering*.

$$[S' \text{ rule S1'}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \forall \mathcal{C}: \mathcal{A} \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{C}]$$

$$[S' \text{ rule S2'}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \mathcal{A} \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}' \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{B}']$$

$$[S' \text{ rule S3'}: \forall \mathcal{A}: \neg \dot{0} \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{A}']$$

$$[S' \text{ rule S4'}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \mathcal{A}' \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{B}' \Rightarrow \mathcal{A} \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{B}]$$

$$[S' \text{ rule S5'}: \forall \mathcal{A}: \mathcal{A} \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{\equiv} \mathcal{A}]$$

$$[S' \text{ rule S6'}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B}' \stackrel{P}{\equiv} (\mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B})']$$

$$[S' \text{ rule S7'}: \forall \mathcal{A}: \mathcal{A} \dot{:} \dot{0} \stackrel{P}{\equiv} \dot{0}]$$

$$[S' \text{ rule S8'}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \mathcal{A} \dot{:} (\mathcal{B}') \stackrel{P}{\equiv} (\mathcal{A} \dot{:} \mathcal{B}) \dot{+} \mathcal{A}]$$

$$\begin{aligned}
& [S' \text{ rule } S9': \forall A: \forall B: \forall C: \forall X: \\
& \mathcal{B} \equiv \langle \mathcal{A} | \mathcal{X} := 0 \rangle \vdash \mathcal{C} \equiv \langle \mathcal{A} | \mathcal{X} := \mathcal{X}' \rangle \vdash \\
& \mathcal{B} \Rightarrow \forall X: (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow \forall X: \mathcal{A}]
\end{aligned}$$

$S1'$  til  $S9'$  er de egentlige aksiomer i PA, og giver logikken lighed, rekursive definitioner af to funktioner (addition og multiplikation), samt induktion. Igen, for at skelne lighed i PA med lighed defineret andetsteds i Logiweb bibliografien for denne side (specifikt, lighed som defineret på siden [1]), har lighedstegnet fået et “p” (for Peano.) Bemærk også brugen af side-betingelser i induktionsprincippet. Brugen af Peano al-kvantoren betyder også at induktion kun kan foregå over Peano variable.

### 3 Hypotetisk deduktion

Beviser der gør brug af induktionsprincippet giver os et glimrende eksempel på en klassisk problemstilling i logik: forholdet mellem praktisk anvendelighed og parsimoni. Ofte vil det være muligt at komprimere en teori til meget få og præcise grundelementer, men på bekostning af brugervenlighed. Et eksempel med høj relevans for dataloger er NAND-gates: De velkendte logiske konnektiver kan repræsenteres ved blot et enkelt, binært symbol. Tilgængæld bliver alt udover de allersimpleste udtryk uoverskuelige at læse for mennesker. En tilsvarende situation gør sig gældende for aksiomatiske systemer: Mængden af aksiomer kan gøres lille, men samtidig bliver systemet sværere at bruge.

Specifikt skal vi i denne rapport benytte induktion, og i induktionsskridtet bevise en implikation. Havde vi arbejdet i et andet system end PA, f.eks. naturlig deduktion (se [4]) ville fremgangsmåden havde været oplagt: naturlig deduktion inkluderer en regel der direkte laver et bevis for  $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$  om til et bevis for  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ . Det “tynde” (men ækvivalente) aksiomatiske system, har *ikke* en sådan regel, da det kan indses ved et meta-argument at ethvert bevis for  $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$  kan transformeres til et bevis  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$  rent mekanisk. Mendelson gennemgår argumentet i [3] s.37, og benytter derfra argumentet som “Deduction theorem” i teksten. Dette er en luksus vi ikke kan tillade os i et strengt formelt system som Logiweb. Alligevel er det oplagt at et bevis for  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$  bør basere sig på beviset for  $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ , og derfor står vi overfor følgende valg:

1. Udfold beviset for  $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$  i hånden.
2. Implementer deduktionsalgoritmen i pyk.

1. er den oplagte mulighed. Det er nemt og velkendt, men det giver lange, ofte uoverskuelige, beviser i praksis. 2. blev frarådet os i forelæsningerne, og selvom det absolut ville være den mest elegante løsning er det formodentlig også urealistisk givet vores erfaring med pyk og Logiweb-systemet. Men der er faktisk en løsning der kombinerer begge løsningers styrker:

3. Svæk de benyttede lemmaer og arbejd *bag* implikationspilen.



Hvad menes der så med det? Jo, det er velkendt at vi kan svække en vilkårlig sand proposition med en vilkårlig betingelse. Dette gælder således også for lemmaer uden præmisser. Vi kan generalisere dette på følgende måde: Givet et beviseligt lemma  $\mathcal{D} \vdash \mathcal{E}$  findes et tilsvarende *hypotetisk* lemma  $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{D} \vdash \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{E}$ . Den hypotetiske udgave af et lemma tillader os at springe implikationspilen over, så at sige. Dette medfører at givet hypotetiske versioner af de lemmaer og aksiomer der indgår i beviset for  $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ , så kan vi trivielt oversætte beviset til et bevis for  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ . Den opmærksomme læser vil indvende at dette reelt set er ækvivalent til at udfolde beviset, men med udfoldningen lagt ud i lemmaer. Dette er korrekt, men overser de motiverende faktorer:

- Hypotetiske lemmaer kan genbruges i andre beviser.
- Det nye bevis har samme længde og struktur som det originale bevis.

Disse faktorer er lovende nok til at vi har benyttet denne bevis strategi. Hypotetiske lemmaer vil fremover blive angivet med et sænket “h”, f.eks. er  $MP'_h$  den hypotetiske udgave af *modus ponens*, dvs. et lemma der siger

[S' lemma  $MP'_h: \forall \mathcal{H}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \vdash \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{A} \vdash \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{B}$ ]

Denne definition er direkte taget fra siden [2], hvor lemmaet også er bevist. Fra denne side tager vi også lemmaet Hypothesize der siger

[S' lemma Hypothesize:  $\forall \mathcal{H}: \forall \mathcal{A}: \mathcal{A} \vdash \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{A}$ ]

Normalt ville vi have kaldt et sådant lemma for “Weaken” eller noget lignende, men med den ovenstående diskussion giver Hypothesize bedre mening.

### 3.1 Forkortende notation

Ovenstående har vi gennemgået hvorledes vi kan benytte argumentationen i et bevis for  $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$  til at lave et bevis for  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ . Det modsatte kan naturligvis også lade sig gøre, ved en simpel anvendelse af *modus ponens*. Et sådant lemma vil vi kalde et *regel*-lemma, og være indikere med et hævet “R”, f.eks. er *Mendelson 3.2(b)<sup>R</sup>* regel-udgaven af *Mendelson 3.2(b)*. Vi vil benytte lemmaer der både er regel- og hypotetiske lemmaer. Dette skal forstås som “den hypotetiske udgave af regel-lemmaet”.

Derudover vil vi tillade os at lægge instantiering af lemmaer med udtryk kvantiseret over Peano variable ud i separate lemmaer. Dette vil blive noteret som lemmaet’s navn efter fulgt at den konkrete variabel (i parentes) der instantieres med. Dette er nødvendigt da al-kvantoren for peano-variable,  $\check{\forall}$ , *ikke* er identisk med al-kvantoren for meta-variable,  $\forall$ , og bevisecheckeren fra [1] ved ikke at al-kvantiserede PA udtryk kan instantieres. For at få en konkret instantiering ud af et peano-kvantiseret udtryk skal vi derfor igennem lidt teknisk fifleri med axiom  $A4'$ , men dette er uinteressant for de beviser hvori instantiering bruges.

Endelig benytter vi lokale makro-definitioner i induktions-skridtet, for at komprimere det visuelle plads-forbrug: (Næsten) alt interessant forgår bag implikations-pilen, så en metavariable reserveres til den fælles præmis. Vi følger eksemplet fra [2] og makrodefinerer desuden anvendelser  $MP'$  og  $MP'_h$  med følgende:

$$[x \supseteq_h y \doteq MP'_h \triangleright x \triangleright y]$$

$$[x \supseteq y \doteq MP' \triangleright x \triangleright y]$$

Dette gøres både af æstetiske hensyn, samt for at lette *pyk*-kodningen.

Værdien af den fremlagte strategi er åbenlys når vi betragter de resulterende beviser (nedenfor): Intet bevis er længere end 10 linier, og argumentationen er klart ækvivalent til Mendelsons.

## 4 Beviser

Formålet med denne rapport er at bevise kommutativitet for addition ([Mendelson 3.2(h)]<sup>7</sup>), som vist i [3], s.156-159.

$$[S' \text{ lemma Mendelson 3.2(h)}: \dot{\forall}t: \dot{\forall}r: t \dot{+} r \stackrel{P}{=} r \dot{+} t]$$

Betragtes beviset i [3], ses det at vi også har brug for følgende lemmaer fra samme afsnit:

$$[Mendelson 3.2(a)]^8, [Mendelson 3.2(b)]^9, [Mendelson 3.2(c)]^{10}, \\ [Mendelson 3.2(d)]^{11}, [Mendelson 3.2(f)]^{12} \text{ og } [Mendelson 3.2(g)]^{13}.$$

For at gøre beviserne overskuelige ændres nogle af lemmaerne (og et enkelt axiom) til regellemmaer og/eller hypotetiske lemmaer samt specialisering til en konkret Peano varial. Notationen forklaret i afsnit 3 benyttes i alle tilfælde. Se bilag A & B for sætninger og beviser for disse.

### 4.1 Tautologier

Der ses desuden at der er brug for to unavgivne tautologier, [Lemma 1]<sup>14</sup> og [Lemma 2]<sup>15</sup>

#### Bevis for Lemma 1

$$[S' \text{ lemma Lemma 1}: \forall A: \forall B: \forall C: A \Rightarrow B \Rightarrow C \vdash B \Rightarrow A \Rightarrow C]$$

#### S' proof of Lemma 1:

L01: Arbitrary $\gg$	$A$	;
L02: Arbitrary $\gg$	$B$	;
L03: Arbitrary $\gg$	$C$	;
L04: Premise $\gg$	$A \Rightarrow B \Rightarrow C$	;
L05: A2' $\gg$	$(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow$	
	$A \Rightarrow C$	;
L06: L05 $\supseteq$ L04 $\gg$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$	;
L07: Hypothesize $\triangleright$ L06 $\gg$	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$	;
L08: A1' $\gg$	$B \Rightarrow A \Rightarrow B$	;
L09: L07 $\supseteq_h$ L08 $\gg$	$B \Rightarrow A \Rightarrow C$	□

<sup>7</sup>[Mendelson 3.2(h)]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{prop three two h}”$

<sup>8</sup>[Mendelson 3.2(a)]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{prop three two a}”$

<sup>9</sup>[Mendelson 3.2(b)]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{prop three two b}”$

<sup>10</sup>[Mendelson 3.2(c)]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{prop three two c}”$

<sup>11</sup>[Mendelson 3.2(d)]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{prop three two d}”$

<sup>12</sup>[Mendelson 3.2(f)]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{prop three two f}”$

<sup>13</sup>[Mendelson 3.2(g)]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{prop three two g}”$

<sup>14</sup>[Lemma 1]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{permute premises}”$

<sup>15</sup>[Lemma 2]  $\stackrel{\text{pyk}}{=} “\text{no middle man}”$

## Bevis for Lemma 2

[S' lemma Lemma 2:  $\forall A: \forall B: \forall C: A \Rightarrow B \vdash B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$ ]

### S' proof of Lemma 2:

L01:	Arbitrary $\gg$	$A$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$B$	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$C$	;
L04:	Premise $\gg$	$A \Rightarrow B$	;
L05:	Premise $\gg$	$B \Rightarrow C$	;
L06:	Hypothesize $\triangleright$ L05 $\gg$	$A \Rightarrow B \Rightarrow C$	;
L07:	L06 $\triangleright_h$ L04 $\gg$	$A \Rightarrow C$	□

## 4.2 Beviser for hovedlemmaer

De tre første lemmaer udsiger at  $\stackrel{P}{\equiv}$  er en ækvivalensrelation. Bemærk at hvor Mendelson rask væk springer flere skridt over, og benytter uidentificerede tauologier, må vi i Logiweb holde os strengt til reglerne for at vise korrekthed.

### 4.2.1 Bevis for Mendelson 3.2(a)

[S' lemma Mendelson 3.2(a):  $\forall T: T \stackrel{P}{\equiv} T$ ]

#### S' proof of Mendelson 3.2(a):

L01:	Arbitrary $\gg$	$T$	;
L02:	S5' $\gg$	$T \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{\equiv} T$	;
L03:	S1' $\gg$	$T \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{\equiv} T \Rightarrow$	;
		$T \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{\equiv} T \Rightarrow T \stackrel{P}{\equiv} T$	;
L04:	L03 $\triangleright$ L02 $\gg$	$T \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{\equiv} T \Rightarrow T \stackrel{P}{\equiv} T$	;
L05:	L04 $\triangleright$ L02 $\gg$	$T \stackrel{P}{\equiv} T$	□

### 4.2.2 Bevis for Mendelson 3.2(b)

[S' lemma Mendelson 3.2(b):  $\forall T: \forall R: T \stackrel{P}{\equiv} R \Rightarrow R \stackrel{P}{\equiv} T$ ]

#### S' proof of Mendelson 3.2(b):

L01:	Arbitrary $\gg$	$T$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$R$	;
L03:	S1' $\gg$	$T \stackrel{P}{\equiv} R \Rightarrow T \stackrel{P}{\equiv} T \Rightarrow R \stackrel{P}{\equiv} T$	;
L04:	Lemma 1 $\triangleright$ L03 $\gg$	$T \stackrel{P}{\equiv} T \Rightarrow T \stackrel{P}{\equiv} R \Rightarrow R \stackrel{P}{\equiv} T$	;
L05:	Mendelson 3.2(a) $\gg$	$T \stackrel{P}{\equiv} T$	;
L06:	L04 $\triangleright$ L05 $\gg$	$T \stackrel{P}{\equiv} R \Rightarrow R \stackrel{P}{\equiv} T$	□

### 4.2.3 Bevis for Mendelson 3.2(c)

[S' lemma Mendelson 3.2(c):  $\forall T: \forall R: \forall S: T \stackrel{P}{\equiv} R \Rightarrow R \stackrel{P}{\equiv} S \Rightarrow T \stackrel{P}{\equiv} S$ ]

**S' proof of Mendelson 3.2(c):**

L01:	Arbitrary $\gg$	$T$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{R}$	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$S$	;
L04:	$S1' \gg$	$\mathcal{R} \stackrel{P}{=} T \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} S \Rightarrow T \stackrel{P}{=} S$	;
L05:	<i>Mendelson 3.2(b)</i> $\gg$	$T \stackrel{P}{=} \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} T$	;
L06:	<i>Lemma 2</i> $\triangleright$ L05 $\triangleright$ L04 $\gg$	$T \stackrel{P}{=} \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} S \Rightarrow T \stackrel{P}{=} S$	$\square$

#### 4.2.4 Bevis for Mendelson 3.2(d)

[S' lemma Mendelson 3.2(d):  $\forall T: \forall \mathcal{R}: \forall S: \mathcal{R} \stackrel{P}{=} T \Rightarrow S \stackrel{P}{=} T \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} S$ ]

**S' proof of Mendelson 3.2(d):**

L01:	Arbitrary $\gg$	$T$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{R}$	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$S$	;
L04:	<i>Mendelson 3.2(c)</i> $\gg$	$\mathcal{R} \stackrel{P}{=} T \Rightarrow T \stackrel{P}{=} S \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} S$	;
L05:	<i>Lemma 1</i> $\triangleright$ L04 $\gg$	$T \stackrel{P}{=} S \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} T \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} S$	;
L06:	<i>Mendelson 3.2(b)</i> $\gg$	$S \stackrel{P}{=} T \Rightarrow T \stackrel{P}{=} S$	;
L07:	<i>Lemma 2</i> $\triangleright$ L06 $\triangleright$ L05 $\gg$	$S \stackrel{P}{=} T \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} T \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} S$	;
L08:	<i>Lemma 1</i> $\triangleright$ L07 $\gg$	$\mathcal{R} \stackrel{P}{=} T \Rightarrow S \stackrel{P}{=} T \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} S$	$\square$

Hvis det ovenstående bevis samlignes med det givet i [3], ses det at Mendelson mangler den sidste linie, og har således ikke bevist det ønskede! Selv en stærk formel beskrivelse kan således falde igennem hvis den bliver checket af en bevis checker. Disse små, trivielle lemmaer viser med al ønskelig tænkelighed at automatiske bevis checkere er relevante, også selvom de identificerede fejl er nemme at rette. Dette gælder specielt i logik, der priser formalisme meget højt.

### 4.3 Induktive beviser for resterende hovedlemmaer

De sidste tre lemmaer bevises ved induktion. Hvis vi ser på axiom S9' ser vi at vi skal vise en implikation, for at vise induktionskridtet.

Bemærk desuden at f,g,h bruger forskellige kvantorer!!!

#### 4.3.1 Bevis for Mendelson 3.2(f)

[S' lemma Mendelson 3.2(f):  $\forall t: t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t$ ]

Vi splitter *Mendelson 3.2(f)* i et basistilælde [*Mendelson 3.2(f)*<sub>0</sub>]<sup>16</sup>, og et induktionsskridt [*Mendelson 3.2(f)*<sub>n</sub>]<sup>17</sup>.

<sup>16</sup>[*Mendelson 3.2(f)*<sub>0</sub>  $\stackrel{\text{pyk}}{=} \text{"prop three two f base"}$ ]

<sup>17</sup>[*Mendelson 3.2(f)*<sub>n</sub>  $\stackrel{\text{pyk}}{=} \text{"prop three two f ind"}$ ]

[S' lemma Mendelson 3.2(f)<sub>0</sub>:  $\dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{0}$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(f)<sub>0</sub>:

L01: S5'  $\gg$   $\dot{0} \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0}$  ;  
L02: Mendelson 3.2(b)<sup>R</sup>  $\triangleright$  L01  $\gg$   $\dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{0}$   $\square$

[S' lemma Mendelson 3.2(f)<sub>n</sub>:  $\dot{\forall}t: (t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t \Rightarrow t' \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t')$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(f)<sub>n</sub>:

L01: Local  $\gg$   $\mathcal{H} = t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t$  ;  
L02: S6'<sub>h</sub>  $\gg$   $\mathcal{H} \Rightarrow \dot{0} \dot{+} t' \stackrel{P}{=} (\dot{0} \dot{+} t')$  ;  
L03: S2'  $\gg$   $\mathcal{H} \Rightarrow t' \stackrel{P}{=} (\dot{0} \dot{+} t')$  ;  
L04: Mendelson 3.2(d)<sub>h</sub><sup>R</sup>  $\triangleright$  L03  $\triangleright$   
L02  $\gg$   $\mathcal{H} \Rightarrow t' \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t'$  ;  
L05: Gen'  $\triangleright$  L04  $\gg$   $\dot{\forall}t: (t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t \Rightarrow t' \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t')$   $\square$

**Induktionsbeviset for Mendelson 3.2(f)**

S' proof of Mendelson 3.2(f):

L01: Mendelson 3.2(f)<sub>0</sub>  $\gg$   $\dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{0}$  ;  
L02: Mendelson 3.2(f)<sub>n</sub>  $\gg$   $\dot{\forall}t: (t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t \Rightarrow t' \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t')$  ;  
L03: S9'  $\gg$   $\dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{0} \Rightarrow$   
 $\dot{\forall}t: (t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t \Rightarrow t' \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t') \Rightarrow$   
 $\dot{\forall}t: t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t$  ;  
L04: L03  $\supseteq$  L01  $\gg$   $\dot{\forall}t: (t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t \Rightarrow t' \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t') \Rightarrow$   
 $\dot{\forall}t: t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t$  ;  
L05: L04  $\supseteq$  L02  $\gg$   $\dot{\forall}t: t \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} t$   $\square$

**4.3.2 Bevis for Mendelson 3.2(g).**

[S' lemma Mendelson 3.2(g):  $\dot{\forall}r: \dot{\forall}t: r' \dot{+} t \stackrel{P}{=} (r \dot{+} t)'$ ]

Ligesom med Mendelson 3.2(f) splitter vi Mendelson 3.2(g) i et basistilælde [Mendelson 3.2(g)<sub>0</sub>]<sup>18</sup>, og et induktionsskridt [Mendelson 3.2(g)<sub>n</sub>]<sup>19</sup>.

[S' lemma Mendelson 3.2(g)<sub>0</sub>:  $r' \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} (r \dot{+} \dot{0})'$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(g)<sub>0</sub>:

L01: S5'  $\gg$   $r' \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} r'$  ;  
L02: S5'  $\gg$   $r \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} r$  ;  
L03: S2'  $\gg$   $r \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} r \Rightarrow (r \dot{+} \dot{0})' \stackrel{P}{=} r'$  ;

<sup>18</sup>[Mendelson 3.2(g)<sub>0</sub> <sup>pyk</sup>  $\stackrel{P}{=} \equiv$  "prop three two g base"]

<sup>19</sup>[Mendelson 3.2(g)<sub>n</sub> <sup>pyk</sup>  $\stackrel{P}{=} \equiv$  "prop three two g ind"]

L04:	$L03 \supseteq L02 \gg$	$(\dot{r} + \dot{0})' \stackrel{P}{=} \dot{r}'$	;
L05:	$Mendelson\ 3.2(d)^R \triangleright L01 \triangleright$ $L04 \gg$	$\dot{r}' + \dot{0} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{0})'$	□

[S' lemma Mendelson 3.2(g)<sub>n</sub>:  $\dot{V}t: (\dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})' \Rightarrow \dot{r}' + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t}')')$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(g)<sub>n</sub>:

L01:	Local $\gg$	$\mathcal{H} = \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	;
L02:	$S6'_h \gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \dot{r}' + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r}' + \dot{t})'$	;
L03:	$S2' \gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow (\dot{r}' + \dot{t}') \stackrel{P}{=} ((\dot{r} + \dot{t}')')$	;
L04:	$Mendelson\ 3.2(c)^R_h \triangleright L02 \triangleright$ $L03 \gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \dot{r}' + \dot{t}' \stackrel{P}{=} ((\dot{r} + \dot{t}')')$	;
L05:	$S6'_h \gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \dot{r} + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	;
L06:	$S2' \gg$	$\dot{r} + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})' \Rightarrow$ $(\dot{r} + \dot{t}')' \stackrel{P}{=} ((\dot{r} + \dot{t}')')$	;
L07:	Lemma 2 $\triangleright L05 \triangleright L06 \gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow (\dot{r} + \dot{t}')' \stackrel{P}{=} ((\dot{r} + \dot{t}')')$	;
L08:	$Mendelson\ 3.2(d)^R_h \triangleright L04 \triangleright$ $L07 \gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \dot{r}' + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t}')'$	;
L09:	$Gen' \triangleright L08 \gg$	$\dot{V}t: (\dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})' \Rightarrow$ $\dot{r}' + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t}')')$	□

Induktionsbeviset for Mendelson 3.2(g)

S' proof of Mendelson 3.2(g):

L01:	$Mendelson\ 3.2(g)_0 \gg$	$\dot{r}' + \dot{0} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{0})'$	;
L02:	$Mendelson\ 3.2(g)_n \gg$	$\dot{V}t: (\dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})' \Rightarrow$ $\dot{r}' + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t}')')$	;
L03:	$S9' \gg$	$\dot{r}' + \dot{0} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{0})' \Rightarrow$ $\dot{V}t: (\dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})' \Rightarrow$ $\dot{r}' + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t}')')$ $\dot{V}t: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	;
L04:	$L03 \supseteq L01 \gg$	$\dot{V}t: (\dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})' \Rightarrow$ $\dot{r}' + \dot{t}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t}')')$ $\dot{V}t: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	;
L05:	$L04 \supseteq L02 \gg$	$\dot{V}t: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	;
L06:	$Gen' \triangleright L05 \gg$	$\dot{V}r: \dot{V}t: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	□

4.3.3 Bevis for Mendelson 3.2(h).

[S' lemma Mendelson 3.2(h):  $\dot{V}t: \dot{V}r: \dot{t} + \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} + \dot{t}$ ]

Ligeledes opdeler vi *Mendelson 3.2(h)* i et basistilælde [*Mendelson 3.2(h)*<sub>0</sub>]<sup>20</sup>, og et induktionsskridt [*Mendelson 3.2(h)*<sub>n</sub>]<sup>21</sup>.

[S' lemma *Mendelson 3.2(h)*<sub>0</sub>:  $\dot{t} \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t}$ ]

S' proof of *Mendelson 3.2(h)*<sub>0</sub>:

- L01: S5'  $\gg$   $\dot{t} \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{t}$  ;  
L02: *Mendelson 3.2(f)*( $\dot{t}$ )  $\gg$   $\dot{t} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t}$  ;  
L03: *Mendelson 3.2(c)*<sup>R</sup>  $\triangleright$  L01  $\triangleright$  L02  $\gg$   $\dot{t} \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t}$   $\square$

[S' lemma *Mendelson 3.2(h)*<sub>n</sub>:  $\dot{\forall} \dot{r}: (\dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t} \Rightarrow \dot{t} \dot{+} \dot{r}' \stackrel{P}{=} \dot{r}' \dot{+} \dot{t})$ ]

S' proof of *Mendelson 3.2(h)*<sub>n</sub>:

- L01: Local  $\gg$   $\mathcal{H} = \dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t}$  ;  
L02: S6'<sub>h</sub>  $\gg$   $\mathcal{H} \Rightarrow \dot{t} \dot{+} \dot{r}' \stackrel{P}{=} (\dot{t} \dot{+} \dot{r})'$  ;  
L03: *Mendelson 3.2(g)*<sub>h</sub>( $\dot{r}, \dot{t}$ )  $\gg$   $\mathcal{H} \Rightarrow \dot{r}' \dot{+} \dot{t} \stackrel{P}{=} (\dot{r} \dot{+} \dot{t})'$  ;  
L04: S2'  $\gg$   $\mathcal{H} \Rightarrow (\dot{t} \dot{+} \dot{r})' \stackrel{P}{=} (\dot{r} \dot{+} \dot{t})'$  ;  
L05: *Mendelson 3.2(c)*<sup>R</sup><sub>h</sub>  $\triangleright$  L02  $\triangleright$  L04  $\gg$   $\mathcal{H} \Rightarrow \dot{t} \dot{+} \dot{r}' \stackrel{P}{=} (\dot{r} \dot{+} \dot{t})'$  ;  
L06: *Mendelson 3.2(d)*<sup>R</sup><sub>h</sub>  $\triangleright$  L05  $\triangleright$  L03  $\gg$   $\mathcal{H} \Rightarrow \dot{t} \dot{+} \dot{r}' \stackrel{P}{=} \dot{r}' \dot{+} \dot{t}$  ;  
L07: Gen'  $\triangleright$  L06  $\gg$   $\dot{\forall} \dot{r}: (\dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t} \Rightarrow \dot{t} \dot{+} \dot{r}' \stackrel{P}{=} \dot{r}' \dot{+} \dot{t})$   $\square$

### Induktionsbeviset for *Mendelson 3.2(h)*

S' proof of *Mendelson 3.2(h)*:

- L01: *Mendelson 3.2(h)*<sub>0</sub>  $\gg$   $\dot{t} \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t}$  ;  
L02: *Mendelson 3.2(h)*<sub>n</sub>  $\gg$   $\dot{\forall} \dot{r}: (\dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t} \Rightarrow \dot{t} \dot{+} \dot{r}' \stackrel{P}{=} \dot{r}' \dot{+} \dot{t})$  ;  
L03: S9'  $\gg$   $\dot{t} \dot{+} \dot{0} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t} \Rightarrow \dot{\forall} \dot{r}: (\dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t} \Rightarrow \dot{t} \dot{+} \dot{r}' \stackrel{P}{=} \dot{r}' \dot{+} \dot{t}) \Rightarrow \dot{\forall} \dot{r}: \dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t}$  ;  
L04: L03  $\triangleright$  L01  $\gg$   $\dot{\forall} \dot{r}: (\dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t} \Rightarrow \dot{t} \dot{+} \dot{r}' \stackrel{P}{=} \dot{r}' \dot{+} \dot{t}) \Rightarrow \dot{\forall} \dot{r}: \dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t}$  ;  
L05: L04  $\triangleright$  L02  $\gg$   $\dot{\forall} \dot{r}: \dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t}$  ;  
L06: Gen'  $\triangleright$  L05  $\gg$   $\dot{\forall} \dot{t}: \dot{\forall} \dot{r}: \dot{t} \dot{+} \dot{r} \stackrel{P}{=} \dot{r} \dot{+} \dot{t}$   $\square$

<sup>20</sup>[*Mendelson 3.2(h)*<sub>0</sub>  $\stackrel{\text{pyk}}{=}$  "prop three two h base"]

<sup>21</sup>[*Mendelson 3.2(h)*<sub>n</sub>  $\stackrel{\text{pyk}}{=}$  "prop three two h ind"]



# A Regellemmaer og hypotetiske lemmaer

I det følgende er flere af de eksisterende lemmaer og aksiomer omskrevet til regellemmaer og/eller hypotetiske lemmaer. Dette gøres for at de øvrige beviser bliver kortere og ser mere overskuelige ud, som detaljeret i bevis-strategien.

## A.1 $S6'$ som hypotetisk lemma

$[S6'_h]$ <sup>22</sup> fungerer som  $S6'$  men har en betingelse  $\mathcal{H}$ .

[S' lemma  $S6'_h$ :  $\forall \mathcal{H}: \forall \mathcal{A}: \forall \mathcal{B}: \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B}' \stackrel{P}{=} (\mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B})'$ ]

S' proof of  $S6'_h$ :

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{H}$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{A}$	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{B}$	;
L04:	$S6'$ $\gg$	$\mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B}' \stackrel{P}{=} (\mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B})'$	;
L05:	Hypothesize $\triangleright$ L04 $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B}' \stackrel{P}{=} (\mathcal{A} \dot{+} \mathcal{B})'$	□

## A.2 Mendelson 3.2(b) som regellemma

$[Mendelson\ 3.2(b)^R]$ <sup>23</sup> er Mendelson 3.2(b) som regellemma, dvs. med betingelsen som præmis.

[S' lemma Mendelson 3.2(b)<sup>R</sup>:  $\forall \mathcal{T}: \forall \mathcal{R}: \mathcal{T} \stackrel{P}{=} \mathcal{R} \vdash \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{T}$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(b)<sup>R</sup>:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{T}$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{R}$	;
L03:	Premise $\gg$	$\mathcal{T} \stackrel{P}{=} \mathcal{R}$	;
L04:	Mendelson 3.2(b) $\gg$	$\mathcal{T} \stackrel{P}{=} \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{T}$	;
L05:	L04 $\supseteq$ L03 $\gg$	$\mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{T}$	□

## A.3 Mendelson 3.2(c) som regellemma

$[Mendelson\ 3.2(c)^R]$ <sup>24</sup> er Mendelson 3.2(c) men hvor betingelserne er præmisser.

[S' lemma Mendelson 3.2(c)<sup>R</sup>:  $\forall \mathcal{T}: \forall \mathcal{R}: \forall \mathcal{S}: \mathcal{T} \stackrel{P}{=} \mathcal{R} \vdash \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{S} \vdash \mathcal{T} \stackrel{P}{=} \mathcal{S}$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(c)<sup>R</sup>:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{T}$	;
------	-----------------	---------------	---

<sup>22</sup> $[S6'_h \stackrel{pyk}{=} \text{“axiom prime s six hyp”}]$

<sup>23</sup> $[Mendelson\ 3.2(b)^R \stackrel{pyk}{=} \text{“prop three two b rule”}]$

<sup>24</sup> $[Mendelson\ 3.2(c)^R \stackrel{pyk}{=} \text{“prop three two c rule”}]$

L02:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{R}$	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{S}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{R}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	;
L06:	<i>Mendelson 3.2(c)</i> $\gg$	$\mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	;
L07:	L06 $\supseteq$ L04 $\gg$	$\mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	;
L08:	L07 $\supseteq$ L05 $\gg$	$\mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	□

#### A.4 *Mendelson 3.2(c)* som hypotetisk regellemma

Lemma [*Mendelson 3.2(c)*<sub>h</sub><sup>R</sup>]<sup>25</sup> er *Mendelson 3.2(c)* hvor betingelserne er ændret til præmisser og som derefter er svækkaet med en betingelse  $\mathcal{H}$ .

[S' lemma *Mendelson 3.2(c)*<sub>h</sub><sup>R</sup>:

$\forall \mathcal{H}: \forall \mathcal{T}: \forall \mathcal{R}: \forall \mathcal{S}: \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{R} \vdash \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S} \vdash \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$ ]

S' proof of *Mendelson 3.2(c)*<sub>h</sub><sup>R</sup>:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{H}$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{T}$	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{R}$	;
L04:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{S}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{R}$	;
L06:	Premise $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	;
L07:	<i>Mendelson 3.2(c)</i> $\gg$	$\mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	;
L08:	Hypothesize $\triangleright$ L07 $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	;
		$\mathcal{S}$	;
L09:	L08 $\supseteq_{\text{h}}$ L05 $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	;
L10:	L09 $\supseteq_{\text{h}}$ L06 $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	□

#### A.5 *Mendelson 3.2(d)* som regellemma

[*Mendelson 3.2(d)*<sup>R</sup>]<sup>26</sup> er *Mendelson 3.2(d)* med betingelserne som præmisser.

[S' lemma *Mendelson 3.2(d)*<sup>R</sup>:  $\forall \mathcal{T}: \forall \mathcal{R}: \forall \mathcal{S}: \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{T} \vdash \mathcal{S} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{T} \vdash \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$ ]

S' proof of *Mendelson 3.2(d)*<sup>R</sup>:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{T}$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{R}$	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{S}$	;
L04:	Premise $\gg$	$\mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{T}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\mathcal{S} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{T}$	;
L06:	<i>Mendelson 3.2(d)</i> $\gg$	$\mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{S} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{\text{P}}{=} \mathcal{S}$	;

<sup>25</sup>[*Mendelson 3.2(c)*<sub>h</sub><sup>R</sup>  $\stackrel{\text{Pyk}}{=} \text{“prop three two c hyp rule”}$ ]

<sup>26</sup>[*Mendelson 3.2(d)*<sup>R</sup>  $\stackrel{\text{Pyk}}{=} \text{“prop three two d rule”}$ ]

L07:	$L06 \supseteq L04 \gg$	$S \stackrel{P}{=} T \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} S$	;
L08:	$L07 \supseteq L05 \gg$	$\mathcal{R} \stackrel{P}{=} S$	□

## A.6 Mendelson 3.2(d) som hypotetisk regellemma

Lemma [Mendelson 3.2(d)<sub>h</sub><sup>R</sup>]<sup>27</sup> er Mendelson 3.2(d) hvor betingelserne er ændret til præmisses som derefter er svækkaet med en betingelse  $\mathcal{H}$ .

[S' lemma Mendelson 3.2(d)<sub>h</sub><sup>R</sup>:  $\forall \mathcal{H}: \forall \mathcal{T}: \forall \mathcal{R}: \forall \mathcal{S}: \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{T} \vdash \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{S} \stackrel{P}{=} \mathcal{T} \vdash \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{S}$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(d)<sub>h</sub><sup>R</sup>:

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{H}$	;
L02:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{T}$	;
L03:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{R}$	;
L04:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{S}$	;
L05:	Premise $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{T}$	;
L06:	Premise $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{S} \stackrel{P}{=} \mathcal{T}$	;
L07:	Mendelson 3.2(d) $\gg$	$\mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{S} \stackrel{P}{=} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{S}$	;
L08:	Hypothesize $\triangleright$ L07 $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{S} \stackrel{P}{=} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{S}$	;
L09:	$L08 \supseteq_h L05 \gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{S} \stackrel{P}{=} \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{S}$	;
L10:	$L09 \supseteq_h L06 \gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{R} \stackrel{P}{=} \mathcal{S}$	□

## B Specialicerede lemmaer

### B.1 Mendelson 3.2(f) specialiseret

Lemma [Mendelson 3.2(f)( $\dot{t}$ )<sup>28</sup> er Mendelson 3.2(f) specialiseret til  $\dot{t}$ .

[S' lemma Mendelson 3.2(f)( $\dot{t}$ ):  $\dot{t} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t}$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(f)( $\dot{t}$ ):

L01:	Mendelson 3.2(f) $\gg$	$\dot{v} \dot{t}: \dot{t} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t}$	;
L02:	A4' @ $\dot{t}$ $\gg$	$\dot{v} \dot{t}: \dot{t} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t} \Rightarrow \dot{t} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t}$	;
L03:	$L02 \supseteq L01 \gg$	$\dot{t} \stackrel{P}{=} \dot{0} \dot{+} \dot{t}$	□

### B.2 Mendelson 3.2(g) specialiseret og hypotiseret.

Lemma [Mendelson 3.2(g)<sub>h</sub>( $\dot{r}, \dot{t}$ )<sup>29</sup> er Mendelson 3.2(g) specialiseret til  $\dot{r}$  og  $\dot{t}$  og hypotiseret (med betingelsen  $\mathcal{H}$ ).

<sup>27</sup>[Mendelson 3.2(d)<sub>h</sub><sup>R</sup> <sup>pyk</sup> "prop three two d hyp rule"]

<sup>28</sup>[Mendelson 3.2(f)( $\dot{t}$ ) <sup>pyk</sup> "prop three two f t"]

<sup>29</sup>[Mendelson 3.2(g)<sub>h</sub>( $\dot{r}, \dot{t}$ ) <sup>pyk</sup> "prop three two g rt hyp"]

[S' lemma Mendelson 3.2(g)<sub>h</sub>( $\dot{r}, \dot{t}$ ):  $\forall \mathcal{H}: \mathcal{H} \Rightarrow \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$ ]

S' proof of Mendelson 3.2(g)<sub>h</sub>( $\dot{r}, \dot{t}$ ):

L01:	Arbitrary $\gg$	$\mathcal{H}$	;
L02:	Mendelson 3.2(g) $\gg$	$\dot{\forall} \dot{r}: \dot{\forall} \dot{t}: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	;
L03:	A4' @ $\dot{r}$ $\gg$	$\dot{\forall} \dot{r}: (\dot{\forall} \dot{t}: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=} (\dot{r} + \dot{t})') \Rightarrow$ $(\dot{\forall} \dot{t}: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=} (\dot{r} + \dot{t})')$	;
L04:	L03 $\supseteq$ L02 $\gg$	$\dot{\forall} \dot{t}: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	;
L05:	A4' @ $\dot{t}$ $\gg$	$\dot{\forall} \dot{t}: \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=} (\dot{r} + \dot{t})' \Rightarrow \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=}$ $(\dot{r} + \dot{t})'$	;
L06:	L05 $\supseteq$ L04 $\gg$	$\dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	;
L07:	Hypothesize $\triangleright$ L06 $\gg$	$\mathcal{H} \Rightarrow \dot{r}' + \dot{t} \stackrel{\text{P}}{=} (\dot{r} + \dot{t})'$	□

# C Litteraturliste

- [1] Klaus Grue, *A Logiweb base page*, Juni 2005  
[http://www.diku.dk/~grue/logiweb/20050502/home/grue/base/  
GRD-2005-06-22-UTC-06-58-05-413682/body/tex/page.pdf](http://www.diku.dk/~grue/logiweb/20050502/home/grue/base/GRD-2005-06-22-UTC-06-58-05-413682/body/tex/page.pdf)
  
- [2] Klaus Grue, *Peano arithmetic*, Juni 2005  
[http://www.diku.dk/~grue/logiweb/20050502/home/grue/peano/  
GRD-2005-06-22-UTC-07-23-31-271829/body/tex/page.pdf](http://www.diku.dk/~grue/logiweb/20050502/home/grue/peano/GRD-2005-06-22-UTC-07-23-31-271829/body/tex/page.pdf)
  
- [3] Elliott Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic, Fourth Edition*,  
Chapman & Hall, 1997
  
- [4] Michael R. A. Huth & Mark D. Ryan, *Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems*, Cambridge University Press, 2003